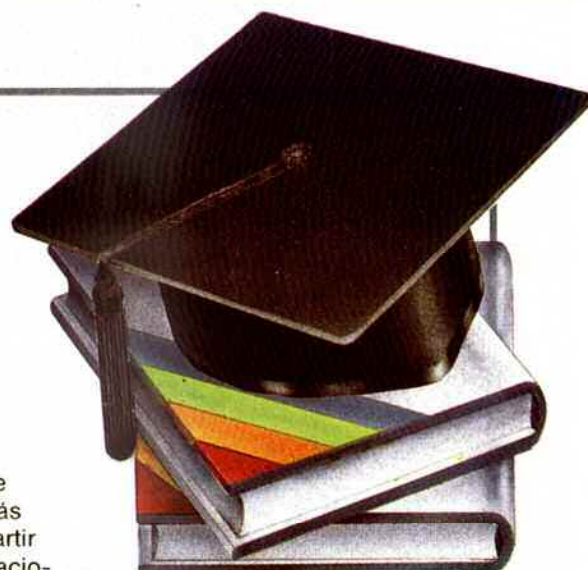




# Profesor particular

Muchas veces, resolver problemas de física resulta entretenido y para demostrártelo te proponemos un programa que te será de gran utilidad.



## MOVIMIENTO PARABOLICO

Dicho programa te permite las siguientes opciones:

a) Obtener las ecuaciones cinemáticas más importantes del tiro parabólico.

b) Simular el tiro con valores iniciales a tu elección.

La posibilidad de simular el tiro te proporciona una idea de los órdenes de magnitud de los valores de velocidad inicial, ángulo de tiro, alcance, tiempos característicos, etc.

c) Por último, el programa te puede proponer problemas variados de tiro parabólico, para que tú los resuelvas (empezando por ver si tienen solución y si tienen más de una).

Si lo requieres, te puede aconsejar (pulsando ayuda) so-

bre el método de resolución más apropiado a partir de las cinco ecuaciones del apartado a).

A propósito: Si quieres comprobar tu solu-

ción, no tienes más que ir al apartado b) y... disparar. Así no tienes ninguna duda del resultado. Los datos del problema están disponibles automáticamente pulsando "p" cuando te pidan las variables.

```
5 CLEAR 39999
7 PAPER 5: BORDER 5: CLS: PR
INT INK 1: AT 5,5: "MOVIMIENTO PAR
ABOLICO"
10 FOR n=USR "a" TO USR "a"+12
15 READ a: POKE n,a: NEXT a
30 DATA 1,2,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196,225,256,289,324,361,400,441,484,529,576,625,676,729,784,841,900,961,1024,1089,1156,1225,1296,1369,1444,1521,1600,1681,1764,1849,1936,2025,2116,2209,2304,2401,2500,2601,2704,2809,2916,3025,3136,3249,3364,3481,3600,3721,3844,3969,4096,4225,4356,4489,4624,4761,4900,5041,5184,5329,5476,5625,5776,5929,6084,6241,6400,6561,6724,6889,7056,7225,7396,7569,7744,7921,8100,8281,8464,8649,8836,9025,9216,9409,9604,9801,10000
0-25
34 DATA 32,46,42,42,46,32,32
36 DATA 32,4,4,4,4,244,146,146
148
148 DATA 7,24,32,32,64,64,32,32
40 DATA 224,24,4,4,2,2,4,4
42 DATA 24,20,11,8,4,15,7,7
44 DATA 24,40,208,16,32,240,22
1-24
46 DATA 15,16,24,127,128,128,1
28,127
28,127 DATA 240,8,24,254,1,1,1,254
50 DATA 0,1,2,4,4,24,32,32
52 DATA 16,4,5,9,16,16,15,0
54 DATA 220,34,2,154,36,18,18
56 DATA 99,1,139,2,28,8,136,11
2
58 DATA 96,144,32,64,240,0,0,0
60 DATA 0,0,59,68,68,76,55,0
62 DIM M(5,4): FOR i=1 TO 5: F
OR j=1 TO 2: READ a: LET M(i,j)=
a: NEXT j: NEXT i
64 DATA 150,10,85,5,310,30,400
50,350,100
70 FOR i=40000 TO 40025: READ
a: POKE i,a: NEXT i
72 DATA 6,5,197,33,0,3,17,1,0,
229,205,16,3,225,17,16,0,167,23
7,63,32,240,153,16,233,201
75 LET c:=12345: FOR i=1 TO 5:
READ a: LET M(i,4)=a: NEXT i: D
ATA 80,60,170,100,350
75 INK 1: PRINT AT 10,1: "PULS
A"
80 PRINT AT 12,3: "1) Breve expli
cación teórica: AT 14,3: "2) Exp
erimentación y comprobación de
n de resultados de pro- ble
mas: AT 18,3: "3) Propuesta de pr
oblemas"
90 IF INKEY$<"1" AND INKEY$<
"2" AND INKEY$<"3" THEN GO TO 9
0
95 GO TO (VAL INKEY$+1)*1000
1000 INK 4: PAPER 5: BORDER 5
1010 CLS: PLOT 0,0: DRAW 60,20:
DRAW 5,12: PLOT 94,12
1020 DRAW 55,16: DRAW 60,-8: PLO
T 180,16: DRAW 60,8: DRAW 15,-2
1030 DRAW 0,-22: DRAW -255,0
1040 DRAW 0,0: DRAW 10,-2
1100 PRINT AT 20,XC: INK 2: "
AT 21,XC: INK 1: X9,Y9: "
1200 PRINT AT X9,Y9: INK 3: "
AT X9+1,Y9: INK 2: "
1300 INK 0: PRINT AT 21,0: "
PLOT 0,7: DRAW 7,4
1420 LET dis=5*SIN (2*a/180)*v0/v0/
9.81: LET ax=dis*255/500
1430 GO SUB 1700
1440 LET hmax=v0*v0*SIN alfa*SIN
alfa/2/9.81
1455 LET JJ=500/255*v0/COS alfa
1450 LET NX=hmax*255/500: LET JJ
J=4*HX/AX/AX: LET dato=0
1455 PRINT AT 6,1: "Pulsa una tec
la para disparar"
1457 PRINT OVER 1: AT 6,1: "Pulsa
una tecla para disparar": INK 2
1460 FOR i=10 TO 255
1470 LET J=JJ*(X-1)
1480 IF J<255 THEN LET dato=0: P
RINT 0: "Te has pasado, tío!": R
ETURN
1485 LET i=i+JJ: PRINT AT 2,2: P
APER 7: 0:INT (i+100)
1505 IF J<10 THEN LET aa=USR 4000
0: RETURN
1510 BEEP 0.1: J/4-20
1512 IF J/175 THEN GO TO 1520
1515 PLOT i,J: IF (i<16 AND i/8=
xc AND i/8<xc+2 THEN GO TO 1800
1517 IF (175-J)/8>X9 AND (175-J
)/8<X9+2 AND i/8>Y9 AND i/8<Y9+2
AND dato=0 THEN GO TO 1900
1520 NEXT i: RETURN
1700 INK 0: PLOT 4,163: DRAW 56,
```

```
0: DRAW 0,-16: DRAW -56,0: DRAW
0,16
1710 PAPER 7: PRINT AT 0,0: "TIE
MPO": FOR n=1 TO 3: PRINT AT n,
0: "NEXT n"
1720 INK 0: PLOT 4,163: DRAW 56,
0: DRAW 0,-16: DRAW -56,0
1730 DRAW 0,16: PAPER 5: RETURN
1800 LET aa=USR 40000: PRINT AT
20,XC: FLASH 1: "AT 21,XC: FL
ASH 1: "
1810 PAUSE 75: PRINT AT 20,XC: "
AT 21,XC: "RETURN
1900 LET aa=USR 40000: PRINT AT
X9,Y9: FLASH 1: "AT X9+1,Y9:
FLASH 1: "
1910 PRINT AT X9,Y9: "AT X9+1
Y9: "
2000 INK 1: CLS: PRINT AT 2,7: "
MOVIMIENTO PARABOLICO"
2010 PRINT AT 5,0: "El movimient
o parabólico es su- ma de dos mov
imientos"
2020 PRINT AT 8,1: "Uno horizont
al, (según X), con velocidad ct
e y ecuación:
2030 PRINT AT 11,5: "X= V0*cos .t
(1)
2040 PRINT AT 13,1: "Y uno verti
cal, (según Y) uni- formemente de
celerado"
2050 PRINT AT 15,5: "Y= V0*sen .t
1/2 g t^2
2060 PRINT AT 18,1: "Dividiendo
a)/(1) obtenemos la trayectoria"
2070 PRINT AT 21,5: "Y=X/(g -gX/(
2V0*cos .t))
2080 CLS: PAPER 7: "Pulsa una
tecla": PAUSE 0: CLS
2090 PRINT AT 2,1: "Para obtener
el alcance del disparo, hacen
os Y=0 en (3) y obtenemos X:
2100 PRINT AT 6,5: "Xmax=V0*sen2
/g
2110 PRINT AT 8,2: "Y ya que 2sen
cos = sen2"
2120 PRINT AT 10,1: "La altura m
axima se obtiene en el centro de
la parábola. Haciendo en (3) X=X
max/2 tenemos
2130 PRINT AT 14,5: "Ymax=V0*sen
^2(2a)/2g
2140 PRINT 0: "Pulsa una tecla
para volver": PAUSE 0: CLS: G
O TO 75
3000 CLS: PRINT AT 0,0: INK 1: "
EXPERIMENTACIÓN"
3010 INK 0: "AT 3,1: INK 0: "
-Aquí puedes practicar disparos
obre un globo y una casa, intro-d
uciendo la velocidad inicial y e
l ángulo inicial"
3010 PRINT AT 9,1: "La situación
del globo y la casa se fija int
roduciendo:
3020 PRINT AT 12,3: "Las distanc
ias que quieras"
AT 14,3: "A par
a situación arbitraria"
AT 16,3:
"A para repetir situación"
AT 18,3:
"A para la situación propue
sa en el problema"
3030 PRINT 0: TAB 7: "Pulsa una
tecla"
PAUSE 0
3100 CLS: PRINT AT 2,5: "Vel. ini
cial: M(1,4): AT 4,5: "Ángulo:
M(2,4): AT 6,5: "alt. globo:
M(3,4): AT 8,5: "dist. globo:
M(4,4): AT 10,5: "dist. casa:
M(5,4)
3110 PRINT AT 16,0: "INTRODUCI
ENDO"
3120 LET aa=12345: LET p=54321
3130 PRINT "Vel. inicial (m/s)
V0=: dato: LET cont=2: GO SUB
3500: LET v0=dato
3130 INPUT "Ángulo inicial (grad
os):": dato: LET cont=6: GO SUB
3500: LET alfa=dato: LET alfa=a
lfa/180*PI
3140 INPUT "altura globo (cm=340m
)": dato: LET cont=8: GO SUB 3
500: LET ag=dato
3150 INPUT "distancia globo (cm=4
50m)": dato: LET cont=8: GO SL
B 3500: LET ag=dato
```

```
3160 INPUT "distancia casa (cm=45
0m)": dato: LET cont=10: GO SU
B 3500: LET dc=dato
3170 LET xc=INT (dc/500+32): LET
Yg=(dg/500+32): LET Xg=(22-ag/5
00+32)
3200 GO SUB 1000: INK 0: PRINT A
T 0,10: "0 para otro disparo"
AT 2,10: "E empieza de nuevo"
3205 PRINT 0: "Altura máxima": I
NK hmax: "M. Alcance": INK dis: "a
"
3210 IF INKEY$="e" THEN CLS: GO
TO 75
3220 IF INKEY$="o" THEN GO TO 31
30
3230 GO TO 3210
3500 LET co=cont/2: IF dato=TH
EN LET co=MICO,4: GO TO 3540
3510 IF dato=5 THEN LET dato=INT
(RND*(MICO,1)/2+MICO,2)+MICO,1)/
4: GO TO 3540
3520 IF dato=6 THEN LET dato=MIC
O,3: GO TO 3540
3530 IF dato=MICO,2) OR dato=MIC
O,2)+MICO,1) THEN GO TO 3110+con
t+5
3540 LET MICO,4)=dato: PRINT AT
cont,10,dato: RETURN
4000 CLS: DIM aa(11,25): PRINT
AT 3,1: "PROBLEMAS (unid: m, m/s,
grados)"
4010 LET aa(2)= "ángulo inicial"
4015 LET aa(1)= "Vel. inicial V0"
4020 LET aa(7)= "tiempo t de impact
o"
4025 LET aa(3)= "altura del globo"
4030 LET aa(4)= "distancia hasta
el globo": LET aa(6)= "volar el
globo"
4035 LET aa(5)= "distancia a la
casa": LET aa(8)= "volar la casa"
4040 LET aa(9)= "volar el globo y
la casa": LET aa(10)= "dar sus
coordenadas"
4045 PRINT AT 5,2: "DATOS": AT 1
4,2: "SE PIDE:"
4050 PRINT 0: (Ver primero si
hay solución)
4060 DIM p(10,6): FOR i=1 TO 10:
FOR j=1 TO 6
4070 READ a: LET p(i,j)=a: NEXT
j: NEXT i
4080 DATA 2,5,11,8,1,7,1,5,11,8,
2,7,2,3,4,6,1,7,1,3,4,6,2,7,3,4,
5,9,1,2,2,1,1,8,10,11,2,1,3,6,4,
7,2,1,4,6,3,7,2,1,7,6,10,11,7,9
,11,16,18,20
4090 LET pro=INT (RND*9+1)
4100 FOR i=1 TO 6: PRINT AT p(10
,i),3: aa(p(i),i)
4110 IF i/3 OR p(i,1)/7 OR p(i,1)
/6 THEN GO TO 4180
4120 LET i=aa(p(i,1)): IF i=15
THEN PRINT AT p(10,i),25: INT (10
+RND*15): GO TO 4180
4130 LET M(1,3)=INT (RND*(M(1,1)
/2+M(1,2)+M(1,1)/4): PRIN
T AT p(10,i),1/29: M(1,3)
4180 NEXT i
4185 PRINT AT 0,2: "Puedes pulsa
r A para ayuda"
4190 IF aa(p(i,1))>3 THEN LET M(4,
3)=M(5,3)-50: PRINT AT 9,29: M(4,
3): "
4200 PAUSE 0: IF INKEY$="a" THEN
GO SUB 4300
4220 RESTORE 4080: CLS: GO TO 7
4300 PRINT AT 0,1: "utiliza por o
rden las ec."
4305 IF pro=6 THEN PRINT 4: "
4310 NEXT i
4310 DIM q(9,2): FOR i=1 TO 9: F
OR j=1 TO 2: READ q: LET q(i,j)
4320 DATA 1,4,1,4,1,3,1,3,1,4,4,
0,3,1,3,1,1,2
4330 PRINT q(pro,1): "y": q(pro,
2): PAUSE 0: RETURN
```

# Profesor particular

## NUMEROS COMPLEJOS

En esta ocasión os ofrecemos un programa con el que podéis operar con números complejos y representarlos en la pantalla. El programa permite calcular cualquier expresión en la que intervengan sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias con argumentos reales o complejos. Asimismo, podéis emplear paréntesis y podéis introducir los números en forma binomial o polar. A continuación, os explicamos el manejo que, como veréis, es muy sencillo para las posibilidades que ofrece:

En primer lugar, al comenzar se requieren dos cantidades: FIX es el número de decimales con el que queréis que se presenten en pantalla los resultados (recomendamos 2), y Xmax es el fondo de escala de la pantalla de representación de los afijos.

Cuando hayáis introducido ambos datos, el programa estará listo para calcular la ex-

presión que queráis. Las teclas habilitadas son: los números, paréntesis, + - \* / y  $\sqrt{\quad}$ , así como «TO» y «THEN», que proporcionan los signos L y  $\circ$  respectivamente para escribir los números en forma polar (Ejemplo:  $i = 1L90^\circ$ ). Para obtener el resultado numérico y gráficamente, pulsad ENTER.

El programa prevee además, 5 registros para guardar los datos. En cada momento se encuentra habilitado el registro en donde figura el asterisco. Con las teclas  $\uparrow$  y  $\downarrow$  podéis pasar de un registro a otro. Con la tecla M memorizáis en ese registro el resultado de la operación. Con la tecla C cambiáis la forma de presentación en el registro de binomial a polar y viceversa. La tecla R representa el registro en la pantalla gráfica. Esto es útil puesto que, aunque los afijos se van representando directamente, tenéis la posibilidad de borrar la pantalla con la tecla B.

Por último, las teclas E y F cambian la escala (Xmax) y el FIX respectivamente. El



cambio de escala borra y vuelve a representar todo lo que hubiera en la nueva escala. Para efectuar otro cálculo pulsad enter y el display estará listo de nuevo.

Finalmente un detalle. Si la representación del afijo se lleva a cabo en color rojo, esto indica que nos hemos salido de la escala, por lo que éste no puede visualizarse completamente. Cambiando la escala, asunto arreglado.

```
10 BORDER 5: PAPER 5: CLS
20 FOR k=1 TO 7: READ a,b,c,dd
30 SUB 100: NEXT k
40 FOR i=USR "a" TO USR "a"+15
50 READ a: POKE i,a: NEXT i
60 DATA 0.1,0.11,0.114,0.117,0.12,0.122,0.124,0.126,0.128,0.13,0.132,0.134,0.136,0.138,0.14,0.142,0.144,0.146,0.148,0.15,0.152,0.154,0.156,0.158,0.16,0.162,0.164,0.166,0.168,0.17,0.172,0.174,0.176,0.178,0.18,0.182,0.184,0.186,0.188,0.19,0.192,0.194,0.196,0.198,0.2,0.202,0.204,0.206,0.208,0.21,0.212,0.214,0.216,0.218,0.22,0.222,0.224,0.226,0.228,0.23,0.232,0.234,0.236,0.238,0.24,0.242,0.244,0.246,0.248,0.25,0.252,0.254,0.256,0.258,0.26,0.262,0.264,0.266,0.268,0.27,0.272,0.274,0.276,0.278,0.28,0.282,0.284,0.286,0.288,0.29,0.292,0.294,0.296,0.298,0.3,0.302,0.304,0.306,0.308,0.31,0.312,0.314,0.316,0.318,0.32,0.322,0.324,0.326,0.328,0.33,0.332,0.334,0.336,0.338,0.34,0.342,0.344,0.346,0.348,0.35,0.352,0.354,0.356,0.358,0.36,0.362,0.364,0.366,0.368,0.37,0.372,0.374,0.376,0.378,0.38,0.382,0.384,0.386,0.388,0.39,0.392,0.394,0.396,0.398,0.4,0.402,0.404,0.406,0.408,0.41,0.412,0.414,0.416,0.418,0.42,0.422,0.424,0.426,0.428,0.43,0.432,0.434,0.436,0.438,0.44,0.442,0.444,0.446,0.448,0.45,0.452,0.454,0.456,0.458,0.46,0.462,0.464,0.466,0.468,0.47,0.472,0.474,0.476,0.478,0.48,0.482,0.484,0.486,0.488,0.49,0.492,0.494,0.496,0.498,0.5,0.502,0.504,0.506,0.508,0.51,0.512,0.514,0.516,0.518,0.52,0.522,0.524,0.526,0.528,0.53,0.532,0.534,0.536,0.538,0.54,0.542,0.544,0.546,0.548,0.55,0.552,0.554,0.556,0.558,0.56,0.562,0.564,0.566,0.568,0.57,0.572,0.574,0.576,0.578,0.58,0.582,0.584,0.586,0.588,0.59,0.592,0.594,0.596,0.598,0.6,0.602,0.604,0.606,0.608,0.61,0.612,0.614,0.616,0.618,0.62,0.622,0.624,0.626,0.628,0.63,0.632,0.634,0.636,0.638,0.64,0.642,0.644,0.646,0.648,0.65,0.652,0.654,0.656,0.658,0.66,0.662,0.664,0.666,0.668,0.67,0.672,0.674,0.676,0.678,0.68,0.682,0.684,0.686,0.688,0.69,0.692,0.694,0.696,0.698,0.7,0.702,0.704,0.706,0.708,0.71,0.712,0.714,0.716,0.718,0.72,0.722,0.724,0.726,0.728,0.73,0.732,0.734,0.736,0.738,0.74,0.742,0.744,0.746,0.748,0.75,0.752,0.754,0.756,0.758,0.76,0.762,0.764,0.766,0.768,0.77,0.772,0.774,0.776,0.778,0.78,0.782,0.784,0.786,0.788,0.79,0.792,0.794,0.796,0.798,0.8,0.802,0.804,0.806,0.808,0.81,0.812,0.814,0.816,0.818,0.82,0.822,0.824,0.826,0.828,0.83,0.832,0.834,0.836,0.838,0.84,0.842,0.844,0.846,0.848,0.85,0.852,0.854,0.856,0.858,0.86,0.862,0.864,0.866,0.868,0.87,0.872,0.874,0.876,0.878,0.88,0.882,0.884,0.886,0.888,0.89,0.892,0.894,0.896,0.898,0.9,0.902,0.904,0.906,0.908,0.91,0.912,0.914,0.916,0.918,0.92,0.922,0.924,0.926,0.928,0.93,0.932,0.934,0.936,0.938,0.94,0.942,0.944,0.946,0.948,0.95,0.952,0.954,0.956,0.958,0.96,0.962,0.964,0.966,0.968,0.97,0.972,0.974,0.976,0.978,0.98,0.982,0.984,0.986,0.988,0.99,0.992,0.994,0.996,0.998,1,0.002,0.004,0.006,0.008,0.01,0.012,0.014,0.016,0.018,0.02,0.022,0.024,0.026,0.028,0.03,0.032,0.034,0.036,0.038,0.04,0.042,0.044,0.046,0.048,0.05,0.052,0.054,0.056,0.058,0.06,0.062,0.064,0.066,0.068,0.07,0.072,0.074,0.076,0.078,0.08,0.082,0.084,0.086,0.088,0.09,0.092,0.094,0.096,0.098,0.1,0.102,0.104,0.106,0.108,0.11,0.112,0.114,0.116,0.118,0.12,0.122,0.124,0.126,0.128,0.13,0.132,0.134,0.136,0.138,0.14,0.142,0.144,0.146,0.148,0.15,0.152,0.154,0.156,0.158,0.16,0.162,0.164,0.166,0.168,0.17,0.172,0.174,0.176,0.178,0.18,0.182,0.184,0.186,0.188,0.19,0.192,0.194,0.196,0.198,0.2,0.202,0.204,0.206,0.208,0.21,0.212,0.214,0.216,0.218,0.22,0.222,0.224,0.226,0.228,0.23,0.232,0.234,0.236,0.238,0.24,0.242,0.244,0.246,0.248,0.25,0.252,0.254,0.256,0.258,0.26,0.262,0.264,0.266,0.268,0.27,0.272,0.274,0.276,0.278,0.28,0.282,0.284,0.286,0.288,0.29,0.292,0.294,0.296,0.298,0.3,0.302,0.304,0.306,0.308,0.31,0.312,0.314,0.316,0.318,0.32,0.322,0.324,0.326,0.328,0.33,0.332,0.334,0.336,0.338,0.34,0.342,0.344,0.346,0.348,0.35,0.352,0.354,0.356,0.358,0.36,0.362,0.364,0.366,0.368,0.37,0.372,0.374,0.376,0.378,0.38,0.382,0.384,0.386,0.388,0.39,0.392,0.394,0.396,0.398,0.4,0.402,0.404,0.406,0.408,0.41,0.412,0.414,0.416,0.418,0.42,0.422,0.424,0.426,0.428,0.43,0.432,0.434,0.436,0.438,0.44,0.442,0.444,0.446,0.448,0.45,0.452,0.454,0.456,0.458,0.46,0.462,0.464,0.466,0.468,0.47,0.472,0.474,0.476,0.478,0.48,0.482,0.484,0.486,0.488,0.49,0.492,0.494,0.496,0.498,0.5,0.502,0.504,0.506,0.508,0.51,0.512,0.514,0.516,0.518,0.52,0.522,0.524,0.526,0.528,0.53,0.532,0.534,0.536,0.538,0.54,0.542,0.544,0.546,0.548,0.55,0.552,0.554,0.556,0.558,0.56,0.562,0.564,0.566,0.568,0.57,0.572,0.574,0.576,0.578,0.58,0.582,0.584,0.586,0.588,0.59,0.592,0.594,0.596,0.598,0.6,0.602,0.604,0.606,0.608,0.61,0.612,0.614,0.616,0.618,0.62,0.622,0.624,0.626,0.628,0.63,0.632,0.634,0.636,0.638,0.64,0.642,0.644,0.646,0.648,0.65,0.652,0.654,0.656,0.658,0.66,0.662,0.664,0.666,0.668,0.67,0.672,0.674,0.676,0.678,0.68,0.682,0.684,0.686,0.688,0.69,0.692,0.694,0.696,0.698,0.7,0.702,0.704,0.706,0.708,0.71,0.712,0.714,0.716,0.718,0.72,0.722,0.724,0.726,0.728,0.73,0.732,0.734,0.736,0.738,0.74,0.742,0.744,0.746,0.748,0.75,0.752,0.754,0.756,0.758,0.76,0.762,0.764,0.766,0.768,0.77,0.772,0.774,0.776,0.778,0.78,0.782,0.784,0.786,0.788,0.79,0.792,0.794,0.796,0.798,0.8,0.802,0.804,0.806,0.808,0.81,0.812,0.814,0.816,0.818,0.82,0.822,0.824,0.826,0.828,0.83,0.832,0.834,0.836,0.838,0.84,0.842,0.844,0.846,0.848,0.85,0.852,0.854,0.856,0.858,0.86,0.862,0.864,0.866,0.868,0.87,0.872,0.874,0.876,0.878,0.88,0.882,0.884,0.886,0.888,0.89,0.892,0.894,0.896,0.898,0.9,0.902,0.904,0.906,0.908,0.91,0.912,0.914,0.916,0.918,0.92,0.922,0.924,0.926,0.928,0.93,0.932,0.934,0.936,0.938,0.94,0.942,0.944,0.946,0.948,0.95,0.952,0.954,0.956,0.958,0.96,0.962,0.964,0.966,0.968,0.97,0.972,0.974,0.976,0.978,0.98,0.982,0.984,0.986,0.988,0.99,0.992,0.994,0.996,0.998,1,0.002,0.004,0.006,0.008,0.01,0.012,0.014,0.016,0.018,0.02,0.022,0.024,0.026,0.028,0.03,0.032,0.034,0.036,0.038,0.04,0.042,0.044,0.046,0.048,0.05,0.052,0.054,0.056,0.058,0.06,0.062,0.064,0.066,0.068,0.07,0.072,0.074,0.076,0.078,0.08,0.082,0.084,0.086,0.088,0.09,0.092,0.094,0.096,0.098,0.1,0.102,0.104,0.106,0.108,0.11,0.112,0.114,0.116,0.118,0.12,0.122,0.124,0.126,0.128,0.13,0.132,0.134,0.136,0.138,0.14,0.142,0.144,0.146,0.148,0.15,0.152,0.154,0.156,0.158,0.16,0.162,0.164,0.166,0.168,0.17,0.172,0.174,0.176,0.178,0.18,0.182,0.184,0.186,0.188,0.19,0.192,0.194,0.196,0.198,0.2,0.202,0.204,0.206,0.208,0.21,0.212,0.214,0.216,0.218,0.22,0.222,0.224,0.226,0.228,0.23,0.232,0.234,0.236,0.238,0.24,0.242,0.244,0.246,0.248,0.25,0.252,0.254,0.256,0.258,0.26,0.262,0.264,0.266,0.268,0.27,0.272,0.274,0.276,0.278,0.28,0.282,0.284,0.286,0.288,0.29,0.292,0.294,0.296,0.298,0.3,0.302,0.304,0.306,0.308,0.31,0.312,0.314,0.316,0.318,0.32,0.322,0.324,0.326,0.328,0.33,0.332,0.334,0.336,0.338,0.34,0.342,0.344,0.346,0.348,0.35,0.352,0.354,0.356,0.358,0.36,0.362,0.364,0.366,0.368,0.37,0.372,0.374,0.376,0.378,0.38,0.382,0.384,0.386,0.388,0.39,0.392,0.394,0.396,0.398,0.4,0.402,0.404,0.406,0.408,0.41,0.412,0.414,0.416,0.418,0.42,0.422,0.424,0.426,0.428,0.43,0.432,0.434,0.436,0.438,0.44,0.442,0.444,0.446,0.448,0.45,0.452,0.454,0.456,0.458,0.46,0.462,0.464,0.466,0.468,0.47,0.472,0.474,0.476,0.478,0.48,0.482,0.484,0.486,0.488,0.49,0.492,0.494,0.496,0.498,0.5,0.502,0.504,0.506,0.508,0.51,0.512,0.514,0.516,0.518,0.52,0.522,0.524,0.526,0.528,0.53,0.532,0.534,0.536,0.538,0.54,0.542,0.544,0.546,0.548,0.55,0.552,0.554,0.556,0.558,0.56,0.562,0.564,0.566,0.568,0.57,0.572,0.574,0.576,0.578,0.58,0.582,0.584,0.586,0.588,0.59,0.592,0.594,0.596,0.598,0.6,0.602,0.604,0.606,0.608,0.61,0.612,0.614,0.616,0.618,0.62,0.622,0.624,0.626,0.628,0.63,0.632,0.634,0.636,0.638,0.64,0.642,0.644,0.646,0.648,0.65,0.652,0.654,0.656,0.658,0.66,0.662,0.664,0.666,0.668,0.67,0.672,0.674,0.676,0.678,0.68,0.682,0.684,0.686,0.688,0.69,0.692,0.694,0.696,0.698,0.7,0.702,0.704,0.706,0.708,0.71,0.712,0.714,0.716,0.718,0.72,0.722,0.724,0.726,0.728,0.73,0.732,0.734,0.736,0.738,0.74,0.742,0.744,0.746,0.748,0.75,0.752,0.754,0.756,0.758,0.76,0.762,0.764,0.766,0.768,0.77,0.772,0.774,0.776,0.778,0.78,0.782,0.784,0.786,0.788,0.79,0.792,0.794,0.796,0.798,0.8,0.802,0.804,0.806,0.808,0.81,0.812,0.814,0.816,0.818,0.82,0.822,0.824,0.826,0.828,0.83,0.832,0.834,0.836,0.838,0.84,0.842,0.844,0.846,0.848,0.85,0.852,0.854,0.856,0.858,0.86,0.862,0.864,0.866,0.868,0.87,0.872,0.874,0.876,0.878,0.88,0.882,0.884,0.886,0.888,0.89,0.892,0.894,0.896,0.898,0.9,0.902,0.904,0.906,0.908,0.91,0.912,0.914,0.916,0.918,0.92,0.922,0.924,0.926,0.928,0.93,0.932,0.934,0.936,0.938,0.94,0.942,0.944,0.946,0.948,0.95,0.952,0.954,0.956,0.958,0.96,0.962,0.964,0.966,0.968,0.97,0.972,0.974,0.976,0.978,0.98,0.982,0.984,0.986,0.988,0.99,0.992,0.994,0.996,0.998,1,0.002,0.004,0.006,0.008,0.01,0.012,0.014,0.016,0.018,0.02,0.022,0.024,0.026,0.028,0.03,0.032,0.034,0.036,0.038,0.04,0.042,0.044,0.046,0.048,0.05,0.052,0.054,0.056,0.058,0.06,0.062,0.064,0.066,0.068,0.07,0.072,0.074,0.076,0.078,0.08,0.082,0.084,0.086,0.088,0.09,0.092,0.094,0.096,0.098,0.1,0.102,0.104,0.106,0.108,0.11,0.112,0.114,0.116,0.118,0.12,0.122,0.124,0.126,0.128,0.13,0.132,0.134,0.136,0.138,0.14,0.142,0.144,0.146,0.148,0.15,0.152,0.154,0.156,0.158,0.16,0.162,0.164,0.166,0.168,0.17,0.172,0.174,0.176,0.178,0.18,0.182,0.184,0.186,0.188,0.19,0.192,0.194,0.196,0.198,0.2,0.202,0.204,0.206,0.208,0.21,0.212,0.214,0.216,0.218,0.22,0.222,0.224,0.226,0.228,0.23,0.232,0.234,0.236,0.238,0.24,0.242,0.244,0.246,0.248,0.25,0.252,0.254,0.256,0.258,0.26,0.262,0.264,0.266,0.268,0.27,0.272,0.274,0.276,0.278,0.28,0.282,0.284,0.286,0.288,0.29,0.292,0.294,0.296,0.298,0.3,0.302,0.304,0.306,0.308,0.31,0.312,0.314,0.316,0.318,0.32,0.322,0.324,0.326,0.328,0.33,0.332,0.334,0.336,0.338,0.34,0.342,0.344,0.346,0.348,0.35,0.352,0.354,0.356,0.358,0.36,0.362,0.364,0.366,0.368,0.37,0.372,0.374,0.376,0.378,0.38,0.382,0.384,0.386,0.388,0.39,0.392,0.394,0.396,0.398,0.4,0.402,0.404,0.406,0.408,0.41,0.412,0.414,0.416,0.418,0.42,0.422,0.424,0.426,0.428,0.43,0.432,0.434,0.436,0.438,0.44,0.442,0.444,0.446,0.448,0.45,0.452,0.454,0.456,0.458,0.46,0.462,0.464,0.466,0.468,0.47,0.472,0.474,0.476,0.478,0.48,0.482,0.484,0.486,0.488,0.49,0.492,0.494,0.496,0.498,0.5,0.502,0.504,0.506,0.508,0.51,0.512,0.514,0.516,0.518,0.52,0.522,0.524,0.526,0.528,0.53,0.532,0.534,0.536,0.538,0.54,0.542,0.544,0.546,0.548,0.55,0.552,0.554,0.556,0.558,0.56,0.562,0.564,0.566,0.568,0.57,0.572,0.574,0.576,0.578,0.58,0.582,0.584,0.586,0.588,0.59,0.592,0.594,0.596,0.598,0.6,0.602,0.604,0.606,0.608,0.61,0.612,0.614,0.616,0.618,0.62,0.622,0.624,0.626,0.628,0.63,0.632,0.634,0.636,0.638,0.64,0.642,0.644,0.646,0.648,0.65,0.652,0.654,0.656,0.658,0.66,0.662,0.664,0.666,0.668,0.67,0.672,0.674,0.676,0.678,0.68,0.682,0.684,0.686,0.688,0.69,0.692,0.694,0.696,0.698,0.7,0.702,0.704,0.706,0.708,0.71,0.712,0.714,0.716,0.718,0.72,0.722,0.724,0.726,0.728,0.73,0.732,0.734,0.736,0.738,0.74,0.742,0.744,0.746,0.748,0.75,0.752,0.754,0.756,0.758,0.76,0.762,0.764,0.766,0.768,0.77,0.772,0.774,0.776,0.778,0.78,0.782,0.784,0.786,0.788,0.79,0.792,0.794,0.796,0.798,0.8,0.802,0.804,0.806,0.808,0.81,0.812,0.814,0.816,0.818,0.82,0.822,0.824,0.826,0.828,0.83,0.832,0.834,0.836,0.838,0.84,0.842,0.844,0.846,0.848,0.85,0.852,0.854,0.856,0.858,0.86,0.862,0.864,0.866,0.868,0.87,0.872,0.874,0.876,0.878,0.88,0.882,0.884,0.886,0.888,0.89,0.892,0.894,0.896,0.898,0.9,0.902,0.904,0.906,0.908,0.91,0.912,0.914,0.916,0.918,0.92,0.922,0.924,0.926,0.928,0.93,0.932,0.934,0.936,0.938,0.94,0.942,0.944,0.946,0.948,0.95,0.952,0.954,0.956,0.958,0.96,0.962,0.964,0.966,0.968,0.97,0.972,0.974,0.976,0.978,0.98,0.982,0.984,0.986,0.988,0.99,0.992,0.994,0.996,0.998,1,0.002,0.004,0.006,0.008,0.01,0.012,0.014,0.016,0.018,0.02,0.022,0.024,0.026,0.028,
```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## INTEGRAL

Este programa pretende ser una ayuda para el lector en el terreno de las Matemáticas; tal ayuda se centra en la resolución de la integral definida de una función entre dos puntos, que representa el área, tomada con su signo, comprendida entre la función y el eje de abscisas. Además de esto, halla la longitud de la curva entre dichos dos puntos y el volumen de la figura de revolución que engendrará la curva al girar alrededor del eje X y la superficie lateral de dicha figura. También dibuja en pantalla una representación de la función en el intervalo dado y una visión de lo que sería la figura de revolución.

La precisión de esta integración es elegida por el usuario mediante un número que pide el programa; este número y la precisión deseada son directamente proporcionales, como también lo es el tiempo de ejecución. Tomar un número demasiado bajo puede dar problemas de exactitud o en la representación de la función, que se resuelven aumentando la precisión; un valor intermedio de 4 ó 5 da buenos resultados si la función no es complicada. En cualquier caso se obtiene una buena estimación comparando los resultados obtenidos con diversas precisiones.

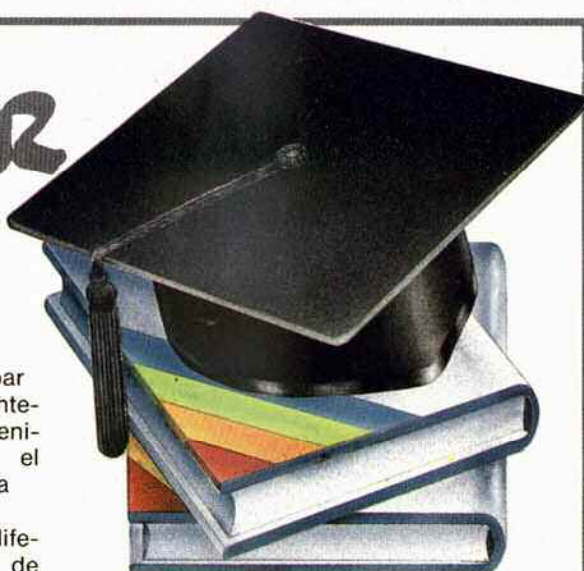
Las aplicaciones del programa son múltiples y van desde su utilización para dibujar la función como para calcular volúmenes y superficies de figuras geométricas como esferas o conos. También sirve para comprobar si la primitiva de una función está bien hallada, pues basta

comprobar que la integral obtenida por el programa coincide con la diferencia de valores que toma la función primitiva entre el extremo superior e inferior del intervalo.

Por ejemplo, podemos hallar el volumen de un tronco de cono de 50 cm de altura y con los radios de las bases de 15 y 25 cm. La ecuación de una generatriz es:

$(y-15) / (25-15) = (x-0) / (50-0)$  o sea,  $y=x/5+15$ ... integrada entre los límites 0 y 50. El número que dé el programa como volumen de esta figura de revolución viene expresado en centímetros cúbicos. La línea tan larga que veis en el programa es una nota explicativa sobre el error que se puede cometer en la integración; no es necesario teclearla, si bien, en caso de optar por éste último, hay que quitar el PAUSE 0, que hay detrás.

Para los posibles interesados podemos decir que el método de integración utilizado es el de Simpson o de integración por parábolas, que consiste en dividir el intervalo en «n» subintervalos y suponer que en éstos la función es una parábola.



```

4 FOR i=USR "a" TO USR "a"+20
: READ a: POKE i: NEXT i
5 DATA 0,14,22,22,16,16,16,16
16,16,24,24
5 DATA 24,24,24,24,5,5,5,5,5,
72,72,48
10 BORDER 6: PAPER 5
11 CLS
15 INK 0: PRINT AT 2,0: "
NOTA: EL ERROR DE INTEGRACION P
UEDE SER APROXIMABLE SI EL NUMERO
PRECISION ES BAJO SIN EMBARGO,
EL TIEMPO DE EJECUCION CRECE SI
LO HACE ESTE. 4 O 5 SON BUENAS
SOLUCIONES SI LAS FUNCIONES A I
NTEGRAR SON SENCILLAS.
E
L ERROR DE INTEGRACION ES MENOR
O IGUAL QUE LA AMPLITUD DEL IN
TERVALLO DIVIDIDO POR 180 VPOR 16
1 (NUM-PRECISION) Y TODO MULTIP
LICADO POR EL VALOR MAXIMO DE LA
DERIVADA CUARTA DE LA FUNCION I
NTEGRADA EN EL INTERVALO.
P
ULSA UNA TECLA PARA CONTINUAR."
17 PRINT AT 18,4: " INCLUYE SIE
MPRE "ABS" EN LA BASE DE LAS P
OTENCIAS (+)".
18 PRINT AT 21,0: " PULSA UNA
TECLA PARA CONTINUAR"
20 PAUSE 0
25 CLS
100 INPUT "Mete f(x)=", LINE c$
110 DEF FN f(x)=VAL c$
120 DEF FN d(x)=SQR (1+ABS (FN
f(x)+5)-FN f(x)-5))/25-5)/12
130 INPUT "Limite inferior a=":
a
140 INPUT "Limite superior b=":
b
150 INPUT "Precision (de 3 a 9)=":
p
155 INK 0: PRINT AT 14,22: "b=":
b: PRINT AT 13,22: "a=": a
160 PRINT AT 17,0: "f(x)=": c$
165 PAPER 0: FOR i=0 TO 16: PRI
NT AT i,0: "
NEXT i: PAPER 5
170 INK 5: PLOT 151,107: DRAW -
127,0: DRAW 0,60
175 BEEP 2,5: INK 1: PRINT AT 1
8,1: "INTEGRAL: PRINT AT 20,1:
1: " GO SUB 2000: PRINT AT 20,5:
" f(x) dx"

```

```

175 LET d=(b-a)/24: LET l=FN d(a
180 LET v=FN f(a): LET l=FN d(a
): LET v=PI*ABS FN f(a)+FN d(a): LET
r=2*PI*ABS FN f(a)+FN d(a): LET
max=ABS 1: LET xmax=a
200 FOR x=a+2 TO b STEP 2+d: LE
T f=FN f(x): LET d=FN d(x): LE
T l=l+2*f: LET l=l+2*d: LET v=v+
2*PI*ABS f: LET ar=ar+4*PI*d+4
85 f: IF ABS f>max THEN LET max=
ABS f: LET xmax=x
210 NEXT x
220 LET i=1-f: LET l=l-e: LET v
v-PI*ABS f:2: LET ar=ar-2*PI*AB
S f:2
240 FOR x=a+d TO b STEP 2+d: LE
T f=FN f(x): LET d=FN d(x): LET
l=l+4*f: LET l=l+4*d: LET v=v+4*
PI*ABS f:2: LET ar=ar+8*PI*d+8*AB
S f: IF ABS f>max THEN LET max=AB
S f: LET xmax=x
245 NEXT x
247 IF ABS FN f(b)>max THEN LET
max=ABS FN f(b): LET xmax=b
250 LET i=i+d/3: LET l=l+d/3: L
ET v=v+d/3: LET ar=ar+d/3
275 IF FN f(xmax)=0 THEN PRINT
AT 15,22: "max=" GO TO 280
278 PRINT AT 15,22: "min="
280 PRINT AT 18,22: FN f(xmax)
300 INK 5: PLOT 32,104: DRAW 0,
6: PLOT 143,104: DRAW 0,8: PRINT
INK 5: PAPER 0: AT 9,18: "b": PRIN
T INK 5: PAPER 0: AT 9,18: "b": PRIN
T INK 5: LET f0=1: GO SUB 500
310 BEEP 1,5: INK 1: PRINT AT 1
8,22: "I=": PRINT AT 2,22: "I" PAUSE
0
325 INPUT "QUIERES SU LONGITUD?
(5/N)": LINE t$
330 IF t$="" THEN GO TO 350
340 BEEP 2,10: PRINT AT 18,1: "L
ONGITUD: PRINT AT 20,1: "L="
GO SUB 2000: GO SUB 2500: PRIN
T AT 4,22: "L=": PRINT AT 5,22
1: PAUSE 100
375 BEEP 2,20: INK 2: PRINT AT
18,1: "VOLUMEN DE REVOLUCION: " P
RINT AT 20,1: "V=" GO SUB 2000
PRINT AT 19,5: "V=" GO SUB 2000
NT AT 20,5: "PI=f(x)/2 dx
378 PRINT PAPER 0: AT 9,4: " " P
RINT PAPER 0: AT 9,18: " " INK 5:
PLOT 24,107: DRAW -24,-24: LET

```

```

f0=-1: GO SUB 500: GO SUB 550: B
EEP 1,20: INK 2: PRINT AT 7,22: "
U=": PRINT AT 8,22: "V: PAUSE 50
380 INPUT "QUIERES LA SUPERFICIE
(5/N)": LINE t$
390 IF t$="" THEN GO TO 450
395 BEEP 2,40: INK 2: PRINT AT
18,1: "SUPERFICIE LATERAL: "
PRINT AT 20,1: "S=": PRINT PAPER
6: AT 20,5: "GO SUB 2000: GO
SUB 2500: PRINT "2*PI*ABS f(x)
dx"
398 PAUSE 200: BEEP 1,40: PRINT
AT 10,22: "S=": PRINT AT 11,22: "
450: PAUSE 50: STOP
500 LET x=a: LET f=FN f(a)+f0:
GO SUB 1550: FOR x=a TO b STEP (
b-a)/22: LET f=FN f(x)+f0: GO SU
B 1500: NEXT x: RETURN
551 LET x0=b: LET y0=FN f(b): I
F ABS y0=0 THEN GO SUB 1000
552 LET x0=a: LET y0=FN f(a): I
F ABS y0=0 THEN GO SUB 1000
553 IF ABS ((xmax-a)+(xmax-b))/
0 THEN LET x0=xmax: LET y0=max:
GO SUB 1000: RETURN
554 RETURN
1000 LET x=x0: LET f=y0: GO SUB
1550: FOR t=0 TO 2*PI STEP 2*PI/
30: LET x=x0-(y0+max+5*IN t)/(b-a
)/5.5: LET f=y0+cos t: GO SUB 15
00: NEXT t: RETURN
1300 DEF FN x(x)=(x-a)+111/(b-a)
+32
1310 DEF FN y(f)=f+63/max+107
1500 DRAW FN x(x)-x1:FN y(f)-y1:
LET x1=FN x(x): LET y1=FN y(f)
1550 LET x1=FN x(x): LET y1=FN y
(f): PLOT x1,y1: RETURN
2000 PRINT AT 20,3: "b": PRINT AT
19,3: "a": PRINT AT 21,3: "c": PR
INT AT 21,4: "a": PRINT AT 19,4: "
b": RETURN
2500 PLOT 40,12: DRAW 4,-4: DRAW
4,10: DRAW 63,0: PRINT AT 20,5:
"1410:12": RETURN
2600 SAVE "INTEGRAL" LINE 1

```

# Profesor particular

Arturo LOBO y Juan J. LEON

## RESOLUCION DE TRIANGULOS

El programa de esta semana está dedicado a una parte del temario de Matemáticas de los cursos 2.º y 3.º de B.U.P., y aunque va destinado principalmente a los alumnos de estos cursos, será de gran utilidad para todos los lectores que tengan dificultades con la trigonometría en general y los problemas de triángulos en particular.

El programa, además de ser didáctico, pretende ser ameno y exige vuestra colaboración para resolver el problema particular que le planteéis.

Llega a la solución siguiendo las mismas fases que seguiría una persona para solucionar el problema; además, muestra cómo solventar cada una de las fases y pregunta si está entendida, no pasando a la siguiente hasta que se haya comprendido la que está en pantalla.

Muestra en la pantalla un triángulo general con todas sus medidas y ángulos, así como las fórmulas que va a utilizar para resolver el problema. Tras esto, pide los datos del problema y la incógnita que se desea hallar.

Para hacerlo mira si puede despejar directamente la incógnita de alguna de las fórmulas; si no es así lo indica y halla alguna otra incógnita con la cual podría dar con la que se ha pedido.

El problema debe estar bien planteado, pues en caso contrario halla una solución falsa o bien no obtiene ninguna. Un caso que sirve ahora de ejemplo es introducir como datos que los catetos tienen una potencia mide 3 unidades.

Para detener el programa basta con pulsar ENTER cuando pida la incógnita.

Es necesario que los ángulos se introduzcan en radianes. Para ello recordad que  $60^\circ = \pi/3$ ,  $30^\circ = \pi/6$ ,  $45^\circ = \pi/4$ ; en general:

$$x \text{ (rad.)} = \frac{x^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

Ejemplo: Datos  $\alpha = \pi/3$  y ENTER,  $\beta = \pi/6$  y ENTER,  $d = 5$  y ENTER; INCOGNITA:  $b$  y ENTER. Solución:  $b = 2,5$ .

No olvidéis que siempre ha de darse  $\alpha < \beta$  y  $a > b$  y  $c > d > h$ ; ha de tenerse muy en cuenta a la hora de introducir los datos.

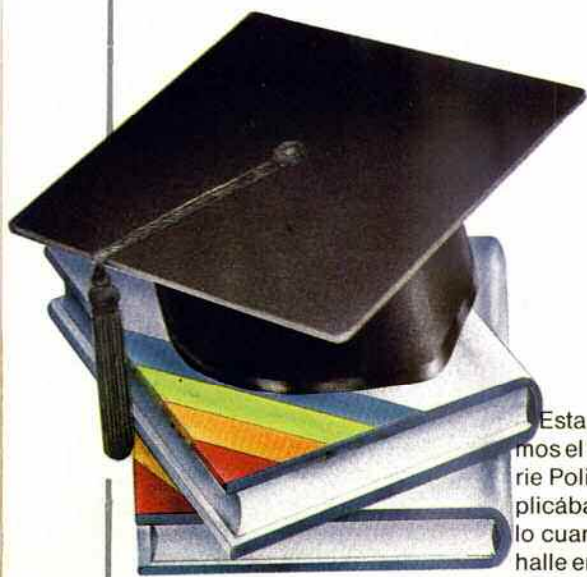


TODAS LAS LETRAS MAYUSCULAS SUBRAYADAS DEBERAN TECLEARSE EN MODO GRAFICO

[illegible][illegible][illegible]







# Profesor particular

## POLINOMIOS II

Esta semana os presentamos el 2.º programa de la serie Polinomios. Como ya explicábamos, debéis teclearlo cuando el Polinomios I se halle en el ordenador. Cuan-

do lo hagáis correr podéis acceder al menú del 2.º programa pulsando ENTER, y volver de la misma forma. Este menú os ofrecerá 4

a) Derivada de un polinomio: os evitará tener que teclearla de nuevo, permitiéndolos introducirla mediante la opción 6 del menú en p o q.

```

3100 LET o$="" : LET flm=1
3110 GO SUB 4000 : LET col=3 : LET
der=0 : LET gru=1 : GO SUB 4100 :
LET jae=gru+3 : GO SUB 4240
3115 CLS : PRINT AT 10,10 : FLASH
1 : "CALCULANDO"
3120 LET der=1 : LET col=4 : GO SU
B 4240 : GO SUB 1800 : LET gru=5
3130 LET der=0 : LET col=4 : GO SU
B 4220 : LET col=1 : LET col=3
3140 GO SUB 4260 : GO SUB 1700 : L
ET col=7 : LET col=3 : GO SUB 42
60 : LET gru=4 : LET col=7 : GO SUB
4220 : GO SUB 4100
3150 FOR n=1 TO 20 : LET p(n,4)=p
(n+1,3)+n : NEXT n : LET p(21,4)=0
3160 LET d(1,3,4)=p(gra3,3) : LET
d(2,3,4)=p(gra3-1,4) : LET flm=1
LET o$=STR$ gra3+STR$ (gra3-1)
3170 GO SUB 1800 : LET flm=0 : FOR
n=1 TO LEN o$ : LET d(n,3,4)=d(n
,3,4)+(1-2*(INT ((VAL o$(n)-1)/2
))*(VAL o$(n)-1)/2)) : NEXT n : DI
M (3)
3180 FOR n=1 TO LEN o$-1 : FOR m=
2 TO 3 : LET c(m)=c(m)+(SGN d(n,m
,4))*SGN d(n+1,m,4)) : NEXT m : NE
XT n : LET nz=ABS (c(3)-c(2))
3190 LET em=gru+3 : LET gru=5 : GO
SUB 4100 : LET nz=gru+3 : DIM v(
15,em+2-1) : CLS : IF nz=0 THEN R
ETURN
3195 PRINT AT 0,0 : "el polinomio
tiene nz, ceros dis tintos"
3200 FOR n=1 TO em : LET d(n,1,4)
=d(n,1,4)+1e-6*(d(n,1,4)=0)
3210 NEXT n : FOR n=1 TO em-2 : L
ET v(1,2+n)=d(em-n-1,1,4)/d(em
-n,1,4) : NEXT n
3220 LET d(1,2)=d(em-1,1,4)/d(e
m,1,4) : LET nd2=2
3230 FOR n=2 TO 2+em-2 STEP 2
3240 LET y(nd2,n)=y(nd2-1,n)+y(n
d2-1,n+1)-y(nd2-1,n-1) : NEXT n
3250 FOR n=3 TO 2+em-3 STEP 2
3260 LET y(nd2,n-1)=y(nd2,n-1)+1
e-6*(y(nd2,n-1)=0) : LET y(nd2,n)
=y(nd2-1,n)+y(nd2,n+1)-y(nd2,n-1
) : NEXT n
3270 IF nd2<15 THEN LET nd2=nd2+
1 : GO TO 3230
3275 CLS : PRINT AT 10,10 : FLASH
1 : "CALCULANDO" : LET nd=1 : LET
p$=""
3277 FOR n=1 TO em-1 : LET d(n,de
riv+1,3)=LN PI : NEXT n
3280 LET j$="" : FOR n=1 TO jae-2
LET j$=j$+(x$) : NEXT n : LET k
$="" : LET as$=STR$ d(jae,1,1) : L
ET j$=j$+(x$)+as$ : LET as$=STR$ (V
AL as$(jae-1)) : LET k$=k$+as$ : FO
R n=1 TO jae-2
3290 LET as$=STR$ d(jae,n,1,1) : L
ET j$=j$+(x$)+as$ : LET as$=STR$
(VAL as$(jae-n-1)) : LET k$=k$+
as$ : NEXT n
3300 LET as$=STR$ d(1,1,1) : LET j
$=j$+(x$)+as$
3310 FOR n=1 TO em-1
3320 LET x=y(10,2+n) : GO SUB 380
0 : FOR m=1 TO nd3 : IF ABS (x-d(m
,deriv+1,3))<1e-4 THEN LET m=nd3
: GO TO 3340
3330 IF m=nd3 THEN LET d(m,deriv
+1,3)=x : LET nd3=nd3+1
3335 IF nd3>nz+1 THEN RETURN
3340 NEXT m : NEXT n
3350 IF nd3>nz+1 THEN RETURN
3355 FOR i=1 TO 21 : LET p(i,4)=0
: NEXT i
3360 LET p(2,4)=1 : LET gru=1 : GO
SUB 4240 : FOR o=pas TO nd3-1
3370 GO SUB 4260 : LET p(1,4)=d(
0,deriv+1,3) : GO SUB 1700 : NEXT
o : GO SUB 4220 : LET pas=nd3 : GO
TO 3280
3380 LET dx=VAL j$/VAL k$ : LET x
=x-dx : IF ABS dx<1e-4 THEN GO T
O 3300
3390 RETURN
3400 FOR n=1 TO LEN p$ : IF p$(n)
=d$ THEN LET p$(n)=s$
3410 NEXT n : FOR n=1 TO LEN q$ :
IF q$(n)=d$ THEN LET q$(n)=s$
3420 NEXT n : RETURN

```

```

3900 BORDER 5 : PAPER 5 : INK 0 : C
LS : LET ope=5
3910 PLOT 16,17 : DRAW 0,105 : DRA
W 217,0 : DRAW 0,-105 : DRAW -217,
0 : INK 1
3920 PRINT AT 4,0 : "Selecciona op
cion : "AT 8,4 : "7) DERIVAR p o q"
:AT 11,4 : "8) DERIVAR p/q" :AT 14,
4 : "9) CEROS POR RUFFINI" :AT 17,3
: "10) CEROS POR ITERACION"
3930 LET as$=INKEY$ : IF as$<"7" A
ND as$<"8" AND as$<"9" AND as$<"
0" AND CODE as$<13 THEN GO TO 39
30
3940 IF CODE as$=13 THEN GO TO 19
0
3950 LET lu=VAL as$+10*(as$="0")
: PRINT AT 3+(lu-13)/27, INK 2 : FLAS
H " " : PAUSE 50 : GO TO 3900+100*(lu
-13)/27
3960 FOR n=1 TO 20 : LET p(n,7)=n
+p(n+1,pol+2) : LET d(n,1,gru)=p(
n,pol+2) : LET d(n,2,gru)=p(n,7)
4000 IF n=2 THEN LET d(n-1,3,gr
u)=d(n-1)+d(n,1,gru)
4030 NEXT n : LET d(21,1,gru)=p(2
1,pol+2)
4040 RETURN
4100 LET gra3=21 : IF n=22
4110 LET n=n-1 : IF gra3=0 THEN G
O TO 4130
4120 IF d(n,deriv+1,gru)=0 THEN LE
T gra3=gra3-1 : GO TO 4110
4130 RETURN
4210 FOR n=1 TO 21 : LET d(n,der1
+1,gru)=d(n,deriv+1,gru) : NEXT
n : RETURN
4230 FOR n=1 TO 21 : LET d(n,der+
1,gru)=VAL STR$ p(n,col) : NEXT n
4250 FOR n=1 TO 21 : LET p(n,col)
=d(n,der+1,gru) : NEXT n : RETURN
4270 FOR n=1 TO 21 : LET p(n,col2
)=p(n,col1) : NEXT n : RETURN
4310 LET d(gra3,1,5)=0
4320 FOR n=gru+3 TO 1 STEP -1 : L
ET d(n,deriv+1,4)=d(n,deriv+1,gru)+d(
n,deriv+1,5)
4340 IF n=2 THEN LET d(n-1,der+
1,5)=gru/d(n,deriv+1,4)
4350 NEXT n : RETURN
4410 INPUT "Ove polinomio? (p/q)
" : LINE as$ : IF as$="p" AND as$<
"0" THEN GO TO 4410
4420 LET col=3 : LET pol=1 : IF as
$="q" THEN LET col=4 : LET pol=2
4430 LET der=0 : LET gru=1 : GO SU
B 4220 : RETURN
4460 PRINT AT 3,3 : "p(q) : " :
p$="" : AT 6,3 : "q(q) : " : q$=""
4470 RETURN
4480 BEEP : 1.10
4490 PRINT "0" : Pulsa una tecla p
ara volver : PAUSE 0 : RETURN
4500 FOR n=gru+3 TO 1 STEP -1 : FO
R m=1 TO 3 : READ r1 : READ gr
4510 GO SUB 4550 : PRINT AT r1,4
+em*(gru+3-n)-1 : LEN STR$ j$,jj
4530 NEXT m : RESTORE 4500 : NEXT
n : PLOT 24,92 : DRAW 0,56 : PLOT 1
6,108 : DRAW 239,0
4540 PRINT AT 7,0,ruf : RETURN
4550 LET jj=d(n,deriv+1,gru) : IF L
E N STR$ jj>09 THEN LET jj=VAL (L
STR$ jj) : (TO cam)
4555 RETURN
4560 DATA 4,1,7,5,9,4
4600 REM 09-100
4610 GO SUB 4400 : CLS : GO SUB 4
000
4630 GO SUB 1200 : LET rs=bs
4640 GO SUB 4450 : PRINT AT 10,3 :
"DERIVADA" :AT 12,3 : CLS : LET vs=r
uf : GO SUB 4220 : GO TO 3900
4700 REM 09-100
4705 LET col=3 : LET der=0 : LET g
ru=1 : GO SUB 4220
4710 LET col=4 : LET der=0 : LET g
ru=2 : GO SUB 4220
4720 FOR i=1 TO 2 : LET pol=i : L
ET gru=i : GO SUB 4000 : NEXT i
4725 CLS : GO SUB 4450 : PRINT AT
3,3 : "p(q) : " : p$="" : (p/q) : "
: q$="" : CHR$ 144
4730 LET der=1 : LET gru=2 : LET c

```

```

ol=4 : GO SUB 4240 : GO SUB 1600 :
PRINT AT 2,0 : "Esto es p(q) : " : L
ET col=7 : LET col=6 : GO SUB 4260 :
LET der=0 : LET col=4 : LET der=1 : L
ET gru=1 : LET col=3 : GO SUB 4240
4735 GO SUB 1600 : PRINT AT 2,0 : "
Esto es p(q) : " : FOR n=1 TO 21 : L
ET d(n,2,5)=-p(n,6)+p(n,7) : NEXT n
4740 LET der=0 : LET gru=2 : GO SU
B 4240 : GO SUB 1600 : PRINT AT 2,
0 : "Esto es q" : CHR$ 144 : LET col=
7 : LET der=2 : LET gru=5 : GO SUB
4220 : LET der=0 : LET gru=1 : LET
col=3 : GO SUB 4240
4750 CLS : GO SUB 4450 : PRINT AT
10,3 : "DERIVADA"
4755 GO SUB 1200 : LET o$=bs
4760 LET col=7 : LET der=1 : LET g
ru=5 : GO SUB 4240 : GO SUB 1200
4765 PRINT AT 14,0 : "p(q) : " :
04 LET LET vs=rs
4770 GO SUB 4460 : GO TO 3900
4800 REM 09-100
4801 CLS : GO SUB 4450
4802 GO SUB 4460 : LET noc=1
4803 IF d(noc,1,1)=0 THEN LET noc
=cnoc+1 : GO TO 4803
4805 LET cue=0 : FOR n=1 TO ABS d
(noc,1,1) : IF ABS d(noc,1,1)/n=1
NT (ABS d(noc,1,1)/n) THEN LET c
ue=cue+1
4810 NEXT n : DIM z(2+cue+noc+1)
: LET cue=1+(noc+1) : FOR n=1
TO ABS d(noc,1,1) : IF ABS d(noc,
1,1)/n=INT (ABS d(noc,1,1)/n) TH
EN LET z(cue)=n : LET z(cue+1)=n
: LET cue=cue+2
4815 NEXT n : LET cue=cue-1
4820 CLS : PRINT AT 1,0 : "El term
ino de menor grado es : d(noc,1,
1) : AT 3,1 : "Los ceros enteros del
polinomio son los divisores del
termino de menor grado : " : FOR n=
1 TO cue : PRINT z(n) : " : NEX
T n
4825 PRINT AT 12,1 : "Usamos a pro
prios todos" : GO SUB 4480
4830 LET der=0 : LET gru=1 : GO SU
B 4100 : LET cam=INT (29/gra3)
4835 LET nd1=0 : FOR k=1 TO cue :
CLS : LET ruf=z(k) : GO SUB 4300 :
GO SUB 4500
4840 IF ABS d(1,deriv+1,4)<1e-4 TH
EN LET nd1=1 : LET d(deriv+1,3)=r
uf : PRINT AT 14,0,ruf : "es
un cero" : GO TO 4850
4845 PRINT AT 14,0,ruf : "no es u
n cero"
4850 GO SUB 4480 : NEXT k
4855 IF nd1=0 THEN CLS : PRINT A
T 5,0 : "No hemos conseguido ningun
cero" : GO TO 4890
4860 CLS : PRINT "Hemos sacado "
:nd1 : "ceros : "AT 2,0 : "El polinom
io es divisible por : "AT 4,15
4870 FOR n=1 TO nd1 : PRINT TAB 3
0 : "d$ : " : IF d(n,deriv+1,3)=0 TH
EN PRINT "+"
4880 PRINT -d(n,deriv+1,3) : " : N
EXT n
4890 GO SUB 4480 : CLS : GO TO 39
00
4900 REM 09-100
4910 CLS : GO SUB 4450 : GO SUB 4
400 : LET col=3 : LET gru=5 : LET d
er=1 : GO SUB 4220 : LET der=2
4920 LET col=4 : GO SUB 4220
4925 LET gru=5 : LET der=1 : LET c
ol=3 : GO SUB 4240 : LET der=2 : L
ET col=4 : GO SUB 4240 : PRINT "N
o hay raíces reales" : GO TO 4950
4930 CLS : PRINT "Raíces reales
diferentes : "nz : "Total raíces
reales : nz+nz : AT 5,12 : "RAIC
ES" : LET vs=rs
4940 FOR o=1 TO nz : PRINT TAB 14
:INT (d(o,deriv+1,3)+1e2+5)+1e-
2 : NEXT o
4950 GO SUB 4480 : GO TO 3900

```

# Profesor particular

## REGRESION

El programa de esta semana trata el tema de la regresión de mínimos cuadrados que es un capítulo de la estadística.

La regresión de mínimos cuadrados consiste en aproximar una serie de puntos por la curva continua que haga que el sumatorio de los cuadrados de los errores o desviaciones sea mínimo. Los tipos de curvas que utiliza el programa para seleccionar la mejor son: lineal, exponencial, logarítmica y potencial. Y también obtiene la parábola que más se aproxima al conjunto de puntos.

Por otra parte el programa también sirve para aproximar cualquier curva continua  $f(x)$  por una de las

anteriores, en un intervalo prefijado. Toma 21 puntos de esta curva, que se le suman a los que ya tenga en la memoria de otras funciones o introducidos como datos.

El programa está pensado para ofrecer la máxima comodidad en la entrada de datos y de funciones.

Si un punto aparece  $n$  veces, no es necesario teclearlo esas veces, sino que basta con introducir  $f=n$ , lo cual simplifica mucho la tediosa labor de introducir los datos, éstos además pueden ser grabados y salvados en cinta con los nombres de matriz X, matriz Y, matriz F.

El programa además selecciona la mejor curva de las que obtiene,

mediante el coeficiente de correlación  $r$  que debe ser lo más próximo a 1.

Además, el usuario puede comprobar la exactitud de la aproximación pues el programa permite la representación en pantalla de los puntos y la curva en cuestión, lo cual es siempre de gran utilidad.

Otra de las opciones del menú expuesto en el programa es la estimación de valores de  $x$  y de  $y$  mediante estas curvas y, nos da la media, la desviación típica y los momentos hasta de 4.º orden tanto para la  $x$  como para la  $y$ .



Como el programa utiliza parábolas, puede ocurrir que a la hora de estimar una  $x$  o una  $y$ , no encuentre solución de una ecuación de segundo grado por lo que dará error, dando un CONTINUE o un GOTO 3000 podréis continuar con los cálculos.

Este programa da los resultados con tres decimales, si se quiere aumentar este número, basta con cambiar la variable  $\text{fix}$  que está en la 1.ª línea del programa.

**TODAS LAS LETRAS MAYUSCULAS SUBRAYADAS DEBERAN TECLEARSE EN MODO GRAFICO**

```
1 LET fix=3: LET dim=100: LET
fin=1: DIM Z(20): DIM x(dim): D
IM y(dim): DIM f(dim)
5 DEF FN F(x)=INT((x+10)/fix)+1
5/101 fix: DEF FN X(x)=(x-xm)+13
6/dmax+71: DEF FN Y(y)=(y-ym)+13
6/dmax+103
7 LET me=4: BORDER me: INK 0:
PAPER me: CLS: LET ink=0
99 DATA "MENU", "1 DIBUJA
R", "2 BORRAR", "3 Y ESTIMADA", "4
X ESTIMADA", "5 MENU GENERAL", "6
PULSA SU TECLA"
100 RESTORE 99: FOR w=1 TO 9: R
EAD 1$: PRINT AT 12+w, 18, 1$: BEE
P 1.04: S=0: NEXT w
P 110 LET code=CODE INKEY$: IF (c
ode>48)&(code<54)=1 THEN LET men
u=code-48: BEEP .5:20: GO TO 11
0+10*menu
111 GO TO 110
120 GO SUB 2000: BEEP 1.10: GO
TO 110
130 GO SUB 2499: BEEP 1.10: GO
TO 110
140 INPUT "valor de x=": x: BEEP
1.10: PRINT AT 10, 20: "x=": x: AT
11, 20: "y=": y: GO TO 110
149 GO TO 4000
150 INPUT "valor de y=": y: BEEP
1.10: PRINT AT 10, 20: "y=": y: AT
11, 20: "x=": x: GO TO 110
160 GO TO 3000
200 LET y=a1+b1*x
203 LET x=a1/b1
210 PRINT AT 2, 20: "y=a+b*x"
213 PRINT AT 4, 19: "a=": a1: AT 5,
19: "b=": b1: AT 7, 19: INVERSE 1: "r"
=1: GO TO 100
250 LET y=a2+EXP (b2*x)-c2
255 LET x=a2/LN ((y+c2)/a2)/b2
260 PRINT AT 2, 19: "y=a+e^(b*x)-
c"
265 PRINT AT 4, 19: "a=": a2: AT 5,
19: "b=": b2: AT 6, 19: "c=": c2: AT 8,
19: INVERSE 1: "r"=r2: GO TO 100
300 LET y=a3+b3*LN (x+d3)
305 LET x=EXP ((y-a3)/b3)-d3
310 PRINT AT 2, 19: "y=a+b*LN(x+c)
"
320 PRINT AT 4, 19: "a=": a3: AT 5,
19: "b=": b3: AT 6, 19: "c=": c3: AT 8,
19: INVERSE 1: "r"=r3: GO TO 100
350 LET y=a4+(x+d4)/b4-c4
355 LET x=(y-a4)/b4+(1/b4)-
d4: PRINT AT 2, 19: "y=a+(x+d)/b-
c"
365 PRINT AT 4, 19: "a=": a4: AT 5,
19: "b=": b4: AT 6, 19: "c=": c4: AT 7,
19: "d=": d4: AT 9, 19: "r"=r4
370 GO TO 100
400 LET y=a5+x*x+k1*x+k0
405 LET x=(-k1+sgn1*SQR (k1*k1
-4*k2*(k0-y)))/2/k2
420 PRINT AT 2, 19: "y=a+xt2+bx+
c": AT 4, 19: "a=": k2: AT 5, 19: "b=":
k1: AT 6, 19: "c=": k0: GO TO 100
450 LET y=a6-(-1+sgn2*SQR ((1+1
-4*(12*(k0-x)))/2)/k2)
455 LET x=a6+y*(1+y+y2+1+y4+10)
460 PRINT AT 2, 19: "y=a+y2+bx+y+
c": AT 4, 19: "a=": k2: AT 5, 19: "b=":
k1: AT 6, 19: "c=": k0: GO TO 100
500 LET ini=fin: GO TO 550
503 INPUT "x": STR$ fin: "x": "x"
INVERSE 0: "y": STR$ fin: "y": "y"
INVERSE 0: "f": STR$ fin: "f": "f"
510 THEN LEN=0 THEN GO TO 1000
530 FOR i=1 TO LEN: IF M$(i)
=" " THEN LET y=VAL M$(i+1 TO k-1)
: LET f=VAL M$(k+1 TO LEN M$): G
O TO 539 (fin+1)
539 NEXT k: LET y=VAL M$: LET f
=1: GO TO 539 (fin+1)
531 LET ini=fin: LET f=1: LET i
nic=fin: INPUT f(x): LINE $:
"intervalo: x1=": x1: "x2=": x2
533 IF fin>inic+20 THEN GO TO 1
000
```

```
535 LET x=xx1+(fin-inic)*(xx2-x
x1)/20: LET y=VAL $: LET f=1
536 GO TO 539 (fin+1)
538 LET minx=x: LET miny=y: LET
maxx=x: LET maxy=y
539 LET x(fin)=x: LET minx=minx
+(x-minx)*(x-minx): LET maxx=maxx
+(x-maxx)*(x-maxx)
540 LET y(fin)=y: LET miny=miny
+(y-miny)*(y-miny): LET maxy=maxy
+(y-maxy)*(y-maxy): LET f(fin)=
f
541 PRINT OVER 1: AT (lin, 18, fin,
AT (lin, 20, x: AT (lin, 25, FN f(y): AT
lin, 30, f
545 LET fin=fin+1: LET lin=lin+
1: IF lin<21 THEN GO TO 501+32*(
menu-8)
546 GO SUB 2999: LET pas=1
550 LET lin=1: PLOT 159, 0: DRAU
0, 167: PLOT 199, 0: DRAU 0, 167
551 PLOT 239, 0: DRAU 0, 167: PRINT OV
ER 1: AT 0, 22: "x": "r": GO TO
502+(29+(pas=1)): menu=8)
559 GO TO 150+50*mejor
600 LET sa=1/na: LET ba=(va-sa
+us)/ma-sa/13: LET sa=(va-ba+1
a)/na: LET ca=sa
620 GO SUB 620+10*pa: GO TO 670
630 RETURN
640 GO TO 660
650 RETURN
660 LET aa=EXP ca: RETURN
670 LET qa=va+ua/na: LET ra=(ca
+ua+ba+va+qa)/(23+ba)
680 RESTORE 550: FOR i=1 TO 4:
LET pa=i: READ ka: LET ta=z(ka)
: READ ka: LET ua=z(ka): READ ka:
LET va=z(ka): READ ka: LET wa=z
(ka): READ ka: LET za=z(ka): GO
SUB 600
810 LET i=a: "STR$ i: LET b=5
: TR$ aa: GO SUB 9999: LET i=b:
: TR$ aa: LET b=b+1: GO SUB 8
999: LET b=b+1: "STR$ i: LET b=5
: TR$ aa: GO SUB 9999
820 NEXT i: LET mejor=1: FOR i=
2 TO 4: LET mejor=mejor+1*(i=
2) OR (i=3) OR (i=4) OR (i=5)
$ mejor): NEXT i
850 DATA 1, 5, 9, 2, 6, 1, 7, 10, 2, 0, 3
5, 11, 4, 6, 3, 7, 12, 4, 8
900 LET xxx=z(2)-z(1)+z(1)/z(19)
: LET xxy=z(19)-z(1)+z(1)/z(19)
: LET xxz=z(13)-z(1)+z(1)/z(19)
: LET xxz=z(14)-z(1)+z(1)/z(19)
: LET den=xxy+xxz+xxz+xxz+xxz
: LET den=den+1e-4*(den=0)
910 LET k2=(xxz+xxz+xxz+xxz+xxz)/
den: LET k1=(xxz+xxz+xxz+xxz+xxz
)/den: LET k0=(z(5)-k1*z(1)-k2*z
(2))/z(19)
920 LET yy=z(6)-z(1)+z(1)/z(19)
: LET yxx=xy: LET yyz=z(16)-z(1)
+z(16)/z(19): LET yxz=z(18)-z(1)
+z(18)/z(19): LET yzz=z(17)-z(1)+
z(17)/z(19)
930 LET deny=yy+y2+y2+y2+y2: L
ET deny=deny+1e-4*(deny=0): LET l1=
(y+y2+y2+y2+y2)/deny: LET l0=(
z(1)-l1*z(1)-l2*z(6))/z(19)
935 LET sg1=SGN (y(fin-2)+l1/2
k2): LET sg2=SGN (y(fin-2)+l1/2
k2)
940 RETURN
1000 LET dmax=(maxx-minx): LET d
min=mayy-miny: LET dmax=dmax+(dmi
n-dmax)/2: LET dmin=dmin+(dmi
n-dmin)/2: LET um=(maxx+minx)/2
1003 DIM Z(20): LET minx=(minx-1)
*(minx=0): LET miy=(miy-1)*(mi
ny=0): FOR i=1 TO fin-1: LET f
=1: LET x=x(x): LET y=y(x): LET
f=1: LET x=LN (x-mix): LET y=LN (y-mi
y)
1005 LET c2=miy: LET c4=c2: LET
c3=miy: LET d4=d3
1007 POKE 41000+k.FN y(y)
42000+k.FN y(y)
```

```
1010 LET z(1)=z(1)+f*x: LET z(2)
=z(2)+f*x*x: LET z(3)=z(3)+f*x*x
3
LET z(4)=z(4)+f*x*x*x
1020 LET z(5)=z(5)+f*y: LET z(6)
=z(6)+f*y*y: LET z(7)=z(7)+f*y*y
3
LET z(8)=z(8)+f*y*y*y
1030 LET z(9)=z(9)+f*x+y: LET z
(10)=z(10)+f*x*y: LET z(11)=z(11)
+f*y*x: LET z(12)=z(12)+f*x*x
3
y
1040 LET z(13)=f*x*x*x+z(13): L
E T z(14)=f*x*x*x*x: LET z(15)
=z(15)+f*y*x*x*x: LET z(16)=z(16)
+f*y*y*y*y: LET z(18)=z(18)+f*x*y
3
y: LET z(17)=z(17)+f*y*y*y*y
1045 LET z(19)=z(19)+f
1050 NEXT k: LET na=z(19): GO SU
B 2499: GO SUB 800: GO SUB 900
GO TO 3000
2000 FOR q=1 TO 17: LET x=minx+q
/18*(maxx-minx): POKE 40000+q, FN
x(x): POKE 40500+q, FN y(y): POKE
+175-FN y(y): POKE 40500+q, FN y(y)
: NEXT q
2020 PLOT INK: PEEK 40001: PEE
K 40501: FOR q=2 TO 17: DRAU INK
: PEEK 40000+q: PEEK 40500+q
+q: PEEK 40500+q: PEEK 40499+
q: NEXT q: RETURN
2499 FOR d=0 TO 21: PRINT AT d, 0
: NEXT d
2500 PLOT 0: FN y(z(5)/z(19)): DR
AU 143, 0: PLOT FN x(z(1)/z(19)):
175: DRAU 0, -143: PRINT AT 19, 0:
"E.H. y=": FN f(z(5)/z(19)): AT 20
, 0: "E.U. x=": FN f(z(1)/z(19)): AT
21, 0: "LONGITUD=": FN f(z(19))
2510 FOR k=1 TO fin-1: PLOT PEEK
(41000+k): PEEK (42000+k): NEXT
k: RETURN
2999 FOR w=0 TO 21: PRINT PAPER
me: AT w, 18: "NEX
T"
3000 LET pas=0: GO SUB 2999: RES
TORE 3500: FOR w=2 TO 16: READ 1
$: PRINT AT w, 18, 1$: BEEP 1/(15+
w)
3010 LET code=CODE INKEY$: IF (c
ode>47)&(code<53)=1 THEN LET menu=c
ode-48: GO SUB 2999: BEEP .5:50:
BEEP .6: GO TO 149+50*menu
3020 GO TO 3010
3500 DATA "MENU GENERAL", "6
MEDIAS DES", "7 DESVIACIONES", "8
Y=a+b*x", "9 Y=a+e^(b*x)-c", "10 Y=a+
b*LN(x+c)", "11 Y=a+(x+d)/b-c", "12
Y=a+b*x+c", "13 Y=a+y2+bx+y+c", "14
INPUT a10", "15 PULSA SU TECLA"
3990 DATA "MAYOR", "Z(1)", "Z(19)", "Z
(5)/Z(19)", "SQR (Z(2)-Z(1)+z
(1)/Z(19))/Z(19)", "SQR (Z(16)
1-Z(16)/Z(19))/Z(19)", "SQR (Z(19)
3993 DATA "X", "SQR (Z(2)-Z(1)+z
(1)/Z(19))/Z(19)-1)", "SQR (Z(19)
3994 DATA "Y", "SQR (Z(6)-Z(1)+z
(1)/Z(19))/Z(19)-1)", "SQR (Z(19)
3995 DATA "n", "Z(19)", "x", "Z(1)
2", "Z(2)", "Z(13)", "x+4", "Z(14)
", "y", "Z(5)", "y2", "Z(6)", "y3", "Z(16)
", "y4", "Z(17)", "z", "Z(9)", "x12+y", "Z
(15)"
4000 RESTORE 3990: FOR w=0 TO 17
: READ 1$: FN f(1): PRINT AT 14,
18, 1$: "FN f(1): NEXT w: PRINT
AT 2, 19: INVERSE 1: "PULSA ENTE
R"
4010 GO TO 4010-1010*(CODE INKEY
=13)
3999 LET sg3s=PEEK 23627+256: PEE
K 23623: FOR i=1 TO LEN M$-(15-
LEN 15)/(LEN 15:15): POKE (a79s
-25+1) CODE (sg3s): NEXT i: FOR
j=1 TO 8: POKE (a79s-25+1+j-1)
CODE "VAL bs: RETURN: REM (j)
: NEXT j: LET a4=VAL bs: RETURN
: REM k=mo: VAL bs: RETURN: REM
```

## POLINOMIOS III

Arturo LOBO y J. J. LEON

El programa de esta semana, tercero de la serie de polinomios, está especialmente indicado para los estudiantes de 3.<sup>o</sup> de B.U.P. y permite representar paso a paso polinomios o cocientes de polinomios tal y como vosotros mismos lo haríais: hallando derivadas, ceros, máximos y mínimos, asíntotas, paridad o imparidad, etc., y construyendo un cuadro de valores de la función y sus derivadas en los intervalos apropiados. Por limitaciones de espacio no explicamos teóricamente algunos de los cálculos que va haciendo pero

proporciona todos los resultados intermedios necesarios y te conduce ordenadamente a la solución final.

En resumen, si quieres aprender de verdad a representar funciones, nada mejor que, provisto del libro de matemáticas, acompañar al ordenador en la resolución del problema. Descubrirás que, en menos tiempo del que crees, todas tus posibles dudas se habrán disipado. Ah, y recuerda: este programa sólo funciona acompañado de los dos ya publicados de esta misma serie.



TODAS LAS LETRAS MAYUSCULAS SUBRAYADAS DEBERAN TECLEARSE EN MODO GRAFICO

```

105 LET m:=0 FOR i:=0 TO 23 P
EAD S=POKE USR"+i+13 NEXT I
0 0 102 153 165 151 12 90 0
0 4 126 4 5 0
0279 IF f=m-1 THEN IF j=a-1 THEN
3305 IF f=a-1 THEN RETURN
3940 IF f=a-1 THEN GO TO 50 00
7767 IF f=a-1 THEN RETURN
5000 CLS INK 2 PLOT 0 121 DR
AU 0 -35 DRAU 255 0 DRAU 0 35
DRAU -255 0 INK 1
5010 PRINT AT 2 2 OPTION "AT A
105 Y COCIENTES DE POLINOMIOS

```

[illegible]

```

01330 PRINT "Q3 AT 7.11. FLASH 1."
01340 IF C0E THEN GO TO 5200
01350 CALCULANDO:
01360 GO SUB 4000 FOR I=1 TO 21
01370 FOR J=1 TO 10:GOTO 5100
01380 NEXT J
01390 NEXT I
01400 GO SUB 4010 LET J=1:GO SUB
01410 LET J=2:GO SUB 4240:GO SUB 1
01420 GO SUB 4300
01430 GO SUB 4300
01440 IF M=1 LET J=1:GO SUB 4300
01450 FOR I=1 TO 21 FOR J=1 TO 2
01460 GO SUB 4300
01470 NEXT J
01480 GO SUB 4300
01490 GO SUB 4300
01500 GO SUB 4300
01510 LET J=1
01520 FOR I=1 TO 3:GO STEP -1
01530 IF I=1 THEN GO TO 5240

```

```

4230 NEXT i
4231 LET col2=3+1:gr3=3 GO SU
4232
4233
4234 LET col3=1+1:gr3=1 GO SUB
4235 GO SUB 1800 LET col4=4
4236
4237 def=0 GO SUB 4220 GO S=1E
4238 gr3=1 THEN GO TO 5300
4239
4240 FOR i=1 TO gr3 LET di=1
4241 di=di+1:di>gr3:1.5 NEXT i
4242
4243 LET col2=3 GO SUB 4260
4244
4245 UB 1700 FOR i=1 TO 21 LET gr1=
4246 nd5+1:sp1=1.7 NEXT i
4247
4248 GO SUB 1700 FOR i=1 TO
4249 21 LET gr1=nd5+1.2:sp1=1.7 NEX
4250 GO TO 5400
4251
4252 5300 FOR i=1 TO gr1 nd5=
4253 1:sp1=1:col2=1 LET gr1=nd5+1
4254 sp1=1.5:col2=1 NEXT i
4255
4256 LET p1=1:gr1=1 TO 21
4257 LET p1=1:gr1=1.2 LET p1=1.4
4258
4259 LET p2=2 NEXT i LET nd5=2

```

```

5405 54210
5410 LET man=3
5410 FOR i:=1 TO 21 LET p(i):=71-9
   i:=man+1 NEXT i GO SUB 1200
5420 LET i:=i+b*5+1
5430 FOR i:=1 TO 21 LET p(i):=71-9
   i:=man+1 NEXT i GO SUB 1200
5440 LET i:=i+b*5+1
5450 IF i>=21 THEN LET man=2 LE
   U:=i GO TO 5410
5500 INK 1:CLS BEEP 3:10 BE
   BEEP 3:10 BEEP 3:10
5510 LET i:=0:PRINT "-E=10:50
   N los resultados:
   i:=0 f:=1 g:=1 h:=1 d:=

```

```

5514 IF C<0 THEN LET pol=1
5515 FOR J=1 TO 21 FOR Y=1 TO C
5516 LET p1:=1+p1*(J+Y)=911,1,1
5517 NEXT J NEXT Y
5520 PRINT Ahora debes ir a la
5521 opciones 3y 10 y hallar los ce
5522 de r y r
5525 IF C<0 THEN PRINT " Halla
5526 ambien los ceros del de-nominado
5527 c d

```

```

5530 PRINT " *Copia antes los
resultado". IF coc THEN PRINT
Recuerda que los ceros de un
cociente son los del numerador."
5540 PRINT " *Cuando lo
se tengas vuelve a GO SUB 4480 L
EST=1:2 GO TO 5560
5600 ELSE INPUT "¿tienes los
ceros? s o " LINE a$ IF a$="s"
AND a$="s" THEN GO TO 200
5605 LET /ml=1 LET z$="" DIM a
(25) DIM b(25) DIM c(25) DIM

```

```

5610 LET I=0 INPUT "Cuantos ceros tiene el 1?"
5620 FOR I=2 TO 2+1 INPUT "Introduce un cero" CALL I NEXT I
5630 INPUT "Cuantos ceros tiene el 2?"
5640 IF I=0 THEN FOR I=1 TO 2 INPUT "Introduce un cero"
5650 I=I+2+1 NEXT I
5660 INPUT "Cuantos ceros tiene el 3?"
5670 TO 2+3 INPUT "Introduce un cero"
5680 CALL I+2+1+2+2 NEXT I
5690 IF COC THEN INPUT "Cuantos ceros tiene el denominador de la T?"
5700 Q=2+1+2+2+3+3 NEXT I
5710 LET DEF=0 LE GR=1 FOR I=1 TO 2+1 LET DEF=I GR=I+1 NEXT I
5720 NEXT I GO SUB 4100 LET GR=0
5730 DEF=999 NEXT DEF
5740 CLS GO SUB 6550 GO SUB 4
5750 CLS GO SUB 6500 GO SUB 4

```

[illegible][illegible]

```

CHRS 14+2*(FN 311-01) TAB 21 C
HRS 143+2*(FN 311-01) TAB 28 CHR
5580 PRINT "O Computavea este c
adrc... " GO SUB 4480
5590 DEF FN X(X)=(1255+FN 21)*(3+ma
1+128)*(2+ABS X+3*ABS X)+255*(2+X
5600 DEF FN V(X)=(1255+FN 21)*(3+
(X+max)+88)*(32+ABS FN 21)*(32+
X)+175*(32+FN 21)*(33+max)
5610 LET ma=4 FOR i=1 TO 22
5620 IF ABS F111max THEN LET ma
=ABS F111
5625 NEXT i FOR i=1 TO 22 IF

```

```

ET FN Z (b11+1+211)*max+5/6 THEN
ET max=ABS FN Z (b11+1+211)*6/5
930 NEXT 1 IF ABS a3>max THEN
ET max=ABS a3
9340 IF b1<0 THEN IF ABS (cc/b
955 CLS PRINT "Vamos a dibujar
maximos y minimos de los cosenos y asinto
a=1 PAUSE 100 CL
9960 GO SUB 8800 IF 21 THEN FOR
1010 TO 31 CIRC OF FN 1

```

```

5970 IF I2 THEN FOR I=1 TO 22
5980   PLOT FN 1*(I1+I1+1)*I, FN 4*(I1+I1+1)*I, BEEP, 1.5 NEXT I
5990 IF I1=0 THEN PI THEN GO SUB 6900
6000   PLOT 1*(I1+I1+1)*I, DRAW INK 3, 2*(I1+I1+1)*I, BEEP, 2.0
6010   PLOT 1*(I1+I1+1)*I, DRAW INK 2, 255*(I1+I1+1)*I, BEEP, 2.0
6020 IF I2 THEN FOR I=1 TO 24
6030   PLOT FN 1*(I1+I1+1)*I, 2*(I1+I1+1)*I, DRAW INK 3, 1*(I1+I1+1)*I, BEEP, 2.0
6040   PLOT 1*(I1+I1+1)*I, DRAW INK 2, 255*(I1+I1+1)*I, BEEP, 2.0

```

[illegible][illegible][illegible]

```

3300 1300WAX 32-CC/BB 33+MAX/
3301 DATA -3+MAX 2"-bb+3+MAX
3302 33-33+MAX 32-CC/BB 33-33+
3303 33
3304 RESTORE 4500 FOR I=1 TO 3
3305 FOR J=1 TO 4-I IF H(I,1) H(I+1,1)
3306 THEN FOR J=1 TO J1+1 H(I,J)
3307 LET H(I,J)=H(I,J)+1 NEXT J
3308 LET H(I,1)=H(I,1)+1 NEXT
3309 NEXT J NEXT I LET X1=FN X
3310 H(I,2)=1 LET Y1=FN Y H(I,2)=1
3311 Y1=FN Y H(I,1)=1 LET Y2=FN Y
3312 WAX RETURN
3313 IF VAL(X1) THEN PRINT CHR(

```

```

154      GO TO 6985
6980      PRINT FN 311
6990      PRINT TAB 10
6995      IF VAL M=0 THEN PRINT CHR$
1545      GO TO 6985
6998      PRINT FN 311
7000      PRINT TAB 26
7005      IF VAL N=0 THEN PRINT CHR$
7010      RETURN
7015      PRINT FN 311 RETURN
7020      LABEL 6985, 6995, 7005, 7015

```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## MATRICES Y ECUACIONES

El programa de esta semana está dirigido a los estudiantes de C.O.U. y versa sobre el tema de las matrices, los determinantes y los sistemas de ecuaciones lineales.

No se trata únicamente de hallar un determinante o de resolver un sistema de ecuaciones, ya hay muchos programas que lo hacen, sino que además estudia la unicidad de la solución del sistema, si es compatible, incompatible o indeterminado, y enseña en la pantalla como se llega a estas con-

clusiones.

Con él podréis aprender cosas como invertir una matriz, hallar un determinante de n.n, hallar el rango de una matriz o resolver un sistema de ecuaciones por n incógnitas, con un método rápido y sencillo, por operaciones elementales con las filas, cambiar filas y sumarle a una combinación de las otras.

Sin duda encontraréis cosas que desconocéis que no os será difícil aprender con él, aunque si lo deseáis el programa sólo os ofrece-

rá los resultados finales.

Cada vez que el ordenador realiza una operación pregunta si está comprendida y no continúa hasta que no pulséis una tecla.

Al comenzar el programa os ofrece un menú de todas las cosas que puede realizar y vuelve a él cuando termina de hacer la que le habíais indicado.

No es conveniente hacerlo correr en el modo de mayúsculas y hay que tener en cuenta que como la pantalla es limitada los elementos de las materias sólo presentan 3 dígitos en la pantalla y aparecen en invertido si

tienen más.

Cuando resuelve los determinantes utiliza propiedades de estos para simplificarlos: si se cambian dos filas el determinante cambia de signo, si se multiplica una fila por un número el determinante queda multiplicado por ese número y si a una fila se le suma una combinación de las otras, no varía.

También tiene la posibilidad de hacer o hallar el máximo común divisor entre dos números y utiliza esto para hacer ceros en las matrices de forma sencilla.



TODAS LAS LETRAS MAYUSCULAS SUBRAYADAS DEBERAN TECLEARSE EN MODO GRAFICO

```

1 BORDER 4: PAPER 4: INK 0: C
LS 50 LET raro=1.23456789: LET dz
i=raro
60 PRINT AT 10,1: "quieres ir v
iendo la resolución en la pantall
a? (s/n)
62 LET ns=INKEY$: IF (ns="s")+
(ns="n")=1 THEN LET ense="(ns="s"
): GO TO 100
85 GO TO 82
90 DATA "1- MA
TRIZ INVERSA", "2- RESOLVER ECUAC
IONES", "3- HALLAR DETERMINANTES",
"4- MAX. COMUN DENOMINADOR", "5-
ORDEN DE UNA MATRIZ", "6- INPUT
MATRIZ", "7- INPUT ECUACIONES", "
PULSA SU TECLA
100 CLS: RESTORE 90: FOR i=1 T
O 9: BEEP 1.6*(i-1): READ U$: P
RINT INVERSE (i=9): AT (1+2*i),4:
U$: NEXT i
110 LET MENU=CODE INKEY$: CLS: I
F (menu=0)+(menu=8) THEN CLS:
GO TO 100 (menu=1)
115 GO TO 110
150 IF (dz=raro)+(dz<0) THEN
EN PRINT AT 20,1: "LA MATRIZ TIENE
QUE SER CUADRADA": GO TO 700
155 RETURN
195 BEEP 1.20: PRINT AT 20,0: "N
O ES INVERTIBLE PORQUE ",as: GO
SUB 7500: GO TO 100
200 GO SUB 150
220 GO SUB 4000: IF DETD=0 THEN
BEEP 1.20: PRINT AT 20,0: "NO ES
INVERTIBLE PORQUE SU DETERMINAN
TE ES 0.": GO SUB 7500: GO TO 10
0
230 GO SUB 7500: CLS: FOR i=1
TO dz: FOR j=1 TO dz: PRINT "I
": "j": "j": "d(i,dz+j)": "d
(i,i)": "d(i,dz+j)/d(i,i)": NEX
T j: NEXT i: GO SUB 7500: GO TO
100
300 IF dz=raro THEN GO TO 800
310 LET eci=SGN (dz-j-1): GO
SUB 4000: GO TO 350+10*eci
320 PRINT AT 20,1: "HAY INFINITA
S SOLUCIONES": GO SUB 7500: GO T
O 100
340 IF D(DZJ,DZJ)<0 THEN PRINT
AT 20,1: "NO HAY SOLUCION": GO S
UB 7500: GO TO 100
343 IF ORDEN=DZJ-1 THEN GO SUB
4250: GO TO 380
345 GO TO 320
350 IF DETD<0 THEN GO TO 380
360 GO TO 320
380 PRINT AT 20,1: "SOLUCION UNI
CA": GO SUB 7500: CLS: FOR i=1
TO dz-j-1: PRINT "x": "j": "d(i,dz
j)": "d(i,i)": "d(i,dzj)/d(i,i)":
NEXT i: GO SUB 7500: GO TO 10
0
400 GO SUB 150: GO SUB 4000: GO
SUB 7500: IF ense=1 THEN PRINT
AT 17,1: "det es igual al product
o de los elementos de la diagona
l porque esta matriz es triangul
ar
410 GO SUB 7500: CLS: PRINT AT
10,0: "DET=";sig;ds: "deto=";
VAL (STR$ "19+ds*10+STR$ detd)
: GO SUB 7500: GO TO 100
500 PRINT AT 2,1: "Halla el M.C.

```

```

D. de los numeros que me des."
505 LET i=1
510 INPUT INVERSE 1: "ENTER para
salir": INVERSE 0: "numero=";L
INE ns: IF LEN ns<0 THEN LET nu
2=VAL ns: GO TO 515
515 GO TO 100
518 PRINT AT 5+2*i,2: nu2: LET i
=i+1: IF i=2 THEN LET mcd=nu2: G
O TO 510
520 LET nu1=mcd: GO SUB 5000: P
RINT AT 10,14: "MCD=";mcd:
GO TO 510
530 IF dz=raro THEN GO TO 700
540 GO SUB 4000: PRINT AT 19,1:
"ORDEN=";ORDEN: "PUES SOLO HAY
"ORDEN" FILAS INDEPENDIENTES":
GO SUB 7500: GO TO 100
700 INPUT "Numero de filas=";d
z:
705 INPUT "Numero de columnas="
;dzj: GO SUB 700: GO TO 730
706 FOR p=1 TO dz: PRINT INVER
SE 1: AT FN x(p),0: INVERSE 0:
PLOT 0,175-0*(FN y(0)+1): DRAW 0
*(FN x(dzj+dzj*(menu=1))+1),0:
NEXT p
710 FOR p=1 TO dz+dzj*(menu=1)
V715 PRINT AT 0, FN x(p)+1: PLOT
0*(FN x(p),167: DRAW 0, 0*(FN y(d
zj)+1): NEXT p: RETURN
730 DIM d(dz+dzj): FOR i=1 TO
dz: FOR j=1 TO dzj: PRINT AT 21
0, "Z("i,j)": "j": PRINT AT F
N y(i), FN x(j): FLASH 1: "L"
740 INPUT Z(i,j): INVERSE (LEN
STR$ Z(i,j)>3): PRINT OVER 1: AT
FN y(i), FN x(j): STR$ Z(i,j)+
") (i TO 3): NEXT j: NEXT i: INVE
RSE 0: GO TO 100
800 INPUT "Numero de ecuaciones
=";dz1:
810 INPUT "numero de incognitas
=";dzj: LET dzj=dzj+1: GO SUB 8
20: GO TO 730
820 FOR p=1 TO dzj-1: PRINT AT
0, FN x(p): "x": NEXT p
821 GO TO 700
890 DEF FN x(j)=(3+j-1)*(j+11)+
29*(j+10): DEF FN y(i)=2+i*(i+11)
+20*(i+10)
900 LET ds="": LET sig=1: LET q
dz1: LET dd=dz1+dzj: LET ddi=
zi+1: DIM dddi,ddj:
910 LET dzmin=dz1: IF dzj<dz1 T
HEN LET dzmin=dzj
910 FOR i=1 TO dz1: FOR j=1 TO
dzj: LET d(i,j)=z(i,j): NEXT j:
NEXT i: FOR i=1 TO dz1: LET d(i
dzj+1)=1: NEXT i
919 GO SUB 705+114*(menu=2)
920 FOR i=1 TO dz1: GO SUB 7300
: NEXT i: GO TO 4200
9250 FOR j=1 TO J2 STEP J3
9260 IF d(j,j)<0 THEN GO TO 405
0
9265 IF pas=0 THEN FOR i=j+3 TO
12 STEP J3: IF d(i,j)<0 THEN L
ET fi1=j: LET fi2=i: GO SUB 4350
: GO SUB 7000: LET as=1: GO SUB
7300: LET i=j: GO SUB 7300: LET
i=as: GO TO 4050
9267 IF pas=1 THEN NEXT j: RETUR
N
9270 GO TO 4105

```

```

4050 LET nu2=d(j,j): LET fi2=j:
FOR i=j+3 TO 12 STEP J3: IF d(i
,j)<0 THEN GO TO 4100
4055 LET nu1=d(i,j): LET fi1=i:
GO SUB 5000: GO SUB 4970: GO SUB
7200: GO SUB 7300
4105 NEXT i: NEXT j: RETURN
4200 LET pas=0: LET j1=1: LET j2
=dmzmin: LET j3=1: LET i2=dzi: GO
SUB 4050
4210 LET detd=1: FOR j=1 TO dzmi
n: LET detd=d(j,j)*detd: NEXT j
4215 LET pas=0: LET orden=dmzmin:
FOR j=1 TO dzmin: LET orden=ord
en-(d(j,j)=0): NEXT j
4230 IF (menu=3)+(menu=5)+(det
d=0) THEN RETURN
4250 LET pas=1: LET j1=dmzmin: LE
T j2=1: LET j3=1: LET i2=1: GO
SUB 4050
4260 RETURN
4950 LET sig=-sig: FOR k=1 TO dd
d: LET dddi,k)=d(fi1,k): NEXT k
4955 FOR k=1 TO ddj: LET d(fi1,k
)=d(fi2,k): NEXT k
4954 FOR k=1 TO ddj: LET d(fi2,k
)=d(ddi,k): NEXT k: RETURN
4970 LET ds=ds+STR$ "STR$ num1: FO
R k=1 TO ddj: LET d(fi1,k)=d(fi1
,k)*num1+d(fi2,k)*num2: NEXT k:
RETURN
5000 LET num1=ABS nu1: LET num2=
ABS nu2:
5040 IF num2<num1 THEN GO TO 505
0
5050 LET mcd=num1: LET num1=num2
LET num2=mcd
5060 LET mcd=(INT (num1/num2)*n
um2-num1): IF mcd=0 THEN GO TO 5
080
5070 LET num1=num2: LET num2=mcd
: GO TO 5060
5080 LET mcd=num2*(num2>1)+(num2
<1)
5090 LET num1=ABS (nu2/mcd): LET
num2=-SGN (nu2*num1)*ABS (nu1/mc
d): RETURN
7000 IF ense=0 THEN RETURN
7010 PRINT AT 19,2: "Cambio la fi
la "; INVERSE 1: fi1: INVERSE 0:
" con la "; INVERSE 1: fi2: INVERS
E 0: " Para no tener 0 en la diag
onal.": IF menu=3 THEN PRINT
9000 LET ds="": sig;ds: "det"
7020 GO TO 7500
7200 IF ense=0 THEN RETURN
7202 PRINT AT 19,2: "Dejo la fila
"; INVERSE 1: fi1: INVERSE 0: "
"; INVERSE 1: fi2: INVERSE 0: " INVE
RSE 0: " + num1: " + "; INVERSE 1:
fi1: INVERSE 0:
7205 IF menu=3 THEN PRINT AT 20
45: "Queda DET=";sig;ds: "det"
7210 GO TO 7500
7300 IF ense=0 THEN RETURN
7311 LET o=1: FOR p=1 TO dz+dzj
*(menu=1): INVERSE (LEN STR$ d(
o,p)>3): PRINT AT FN y(o), FN x(p
): (STR$ d(o,p)+") (i TO 3): NE
XT p
7320 INVERSE 0: GO SUB 711: RETU
RN
7500 BEEP 5.10: PRINT AT 21,20:
"TERMINO": PAUSE 0: PRINT AT
19,0: "": FOR T=1 TO 31: PRI
NT "": NEXT T: RETURN

```



# Profesor particular

## REPRESENTACION GRAFICA

Arturo LOBO y J. J. LEON



El artículo que os ofrecemos esta semana se sale un poco de nuestra línea habitual de ofrecer programas didácticos y educativos, programas que enseñan cosas.

Este os será de mucha utilidad cuando encontréis funciones extrañas o trascendentes cuya representación gráfica o resolución sean difíciles de obtener.

Dibujar en la pantalla la función que le pidáis, que no tiene por que ser explícita,  $y=f(x)$ , sino que puede venir dada también en forma implícita  $f(x,y)=0$ , por ejemplo,  $\text{sen } y+yx^2=0$  que no se puede dibujar sin la ayuda de un ordenador, por

que es trascendente.

Le tenéis que dar entre qué valores de  $x$  queréis que os lo represente y un valor inicial de  $y$  que utiliza para resolver la función por métodos iterativos.

También os permite representar una matriz de puntos discretos que os interesará ver en la pantalla. Por ejemplo, podrían ser distintos puntos espacio-tiempo que podrían haber obtenido en un experimento de física sobre el movimiento de un cuerpo.

Esta matriz puede tener cualquier nombre, salvo  $v$ ,  $q$  o  $z$ .

Es una matriz de dos columnas, la primera será la de la va-

riable del eje  $x$  que tiene que estar ordenada, la  $x$  de un punto mayor que de la del anterior.

La representación que aparece en la pantalla es realmente espectacular, el programa elige por sí solo, y dibuja la escala de las  $x$  y de las  $y$ , aunque os permite seleccionar a vosotros la escala. Dibuja cada unidad con el numerito que le corresponde debajo.

No utiliza los números del Spectrum, sino otros más pequeños que dan mayor vistosidad.

Este programa no puede correr en un Spectrum de 16k porque utilizan una rutina máquina que se ubica en la parte

alta de la memoria por encima de la dirección 65000.

También conviene advertir que hay que tener cuidado al introducir la función, no olvidar ningún paréntesis, por ejemplo, pues el programa lo admitirá aunque dará error al ejecutarlo.

También hay que tener en cuenta que las funciones implícitas pueden tener ninguna o varias soluciones para un valor de  $x$ . El programa sólo halla una de ellas, o sea, sólo dibuja una de las formas de la función si tiene varias. Podría dibujar la otra escogiendo un valor inicial apropiado.

TODAS LAS LETRAS MAYUSCULAS SUBRAYADAS DEBERAN TECLEARSE EN MODO GRAFICO

```
6997 DEF FN X(X)=(X-ORIGX)/UNIX+
1640F
6998 DEF FN Y(Y)=(Y-ORIGY)/UNIFY+
1640F
6999 DEF FN E(X)=INT (LN ABS X/L
N 10)
7000 GO TO 7500
7002 LET DIMQ=0: LET DIMW=0: LET
DIME=0
7004 RESTORE 7020
7005 FOR I=1 TO 8: READ M$: BEEP
1/(1+15)*2+1: PRINT AT 2+(I+1)*
3,1: M$: NEXT I
7010 LET MENU1=CODE INKEY$-48: I
F (MENU1<0)+(MENU1<8)=1 THEN GO
TO 7025
7011 GO TO 7010
7012 GO TO 7011+MENU1+(MENU1=1)
7013 LET ORDEN=(MENU1=2): GO SUB
7400: RETURN
7014 LET ORDEN=2: GO SUB 7400: R
ETURN
7015 RETURN
7016 LET LOTO=1: GO SUB 7380: RE
TURN
7017 LET LOTO=0: GO SUB 7380: GO
TO 7016
7018 LET LOTO=1: GO SUB 7380: GO
TO 7019
7019 LET LOTO=0: GO SUB 7380: RE
TURN
7020 DATA "MENU DE ENTRAMADOS: ",
1-"PLOTTERO SIMPLE", "2-"PLOTTERO D
OBLE", "3-"PLOTTERO TRIPLE", "4-"SIN
ENTRAMADO", "5-"DOBLE RAYADO", "6-"
RAYADO SIMPLE", "7-"PUNTO RAYA",
7021 DATA "INPUT DE FUNCIONES: ",
1-"Y=F(X)", "2-"F(X,Y)=0", "3-"
MATRIZ DE PUNTOS", "4-"ELECCION DE
ESCALA", "5-"SALIR"
7025 LET M$="SALIR"
7026 DIM A(50,2): DIM B(50,2): D
IM W(50,2): DIM E(50,2)
7030 CLS: RESTORE 7021: LET PAS
A=PASA+1: FOR I=1 TO 5: READ M$:
BEEP 1+3/4*(1+10)*20-2+1: PRINT
AT 2+(I+1)*3,1+(I+1)*8,M$: NE
XT I
7035 LET MENU2=CODE INKEY$-48: I
F (MENU2<0)+(MENU2<8)=1 THEN CLS
GO TO 7025+MENU2-(MENU2=5)
7036 GO TO 7035
7037 DEF FN F(X,Y)=VAL A$
7040 INPUT "Mete f(x,y)=", LINE A$
LET A$=A$+"-Y=": GO TO 7060
7045 INPUT "Mete f(x,y)=", LINE
A$: GO TO 7060
7050 INPUT "COMO SE LLAMA LA MAT
RIZ ", B$
7052 INPUT "CUANTOS PUNTOS HAY ?
DIM1: DIM Y(DIM1,2): FOR I=1
TO DIM1: FOR J=1 TO 2: LET U(I,J)
=VAL (B$+(I+1)*J): NEXT J: NEXT
I
7053 GO TO 7060
7055 CLS: INPUT "ORIGEN EN X = ",
ORIGX: INPUT "UNIDAD PARA X = ",
UNIX: INPUT "ORIGEN EN Y = ", ORIG
Y: INPUT "UNIDAD PARA Y = ", UNIF
7059 GO TO 7100
7060 IF MENU2=2 THEN GO TO 7075
7061 INPUT "LIMITE INFERIOR DE X
=", X0: INPUT "LIMITE SUPERIOR
DE X = ", X1: LET DIM1=21: DIM V(
21,2): INPUT "VALOR INICIAL PARA
Y = ", Y0
7063 LET Y=0: FOR I=1 TO 21: LET
X=X0+(1-1)/20*(X1-X0): LET Y0=
Y: GO SUB 7270: IF CONT<50 THEN
LET V(I,1)=X: LET V(I,2)=Y: NEXT
I: GO TO 7075
7065 GO TO 7030
7075 FOR I=1 TO DIM1: FOR J=1 TO
2: GO SUB 7080+PASA: NEXT J: NE
XT I: GO TO 7100
7080 LET A(I,J)=V(I,J): LET DIMQ
=DIMQ+5: RETURN
```

```
7081 LET W(I,J)=V(I,J): LET DIMW
=DIMW+5: RETURN
7082 LET E(I,J)=V(I,J): LET DIME
=DIME+5: RETURN
7100 LET ORX=52: LET ORY=11: LET
BOR=0: GO SUB 7430: GO SUB 7012
7105 LET DIM=DIMQ: FOR I=1 TO DI
M: V(I,1)=1 TO 2: LET Z(I,J)=Q(I,
J): NEXT J: NEXT I: IF MENU2<4
THEN GO SUB 7300
7110 GO SUB 7200: LET DIREC=5000
0: GO SUB 7220: GO SUB 7230: PRI
NT A$: ENTER PARA CAMBIAR DE ESC
ALA
7120 PAUSE 0: LET MENU2=4: GO TO
(7055+25+(CODE INKEY$<13))
7200 LET EJE=1: FOR J=0 TO 10: S
TEP 0: LET NUM=ORIX+J+UNIX: LET
PLOY=ORY+J: LET PLOX=ORX+16*J:
GO SUB 7250: NEXT J
7205 LET EJE=0: FOR J=0 TO 10:
LET NUM=ORIX+J+UNIX: LET PLOY=0
RX+2: LET PLOY=ORY+16*J-3+(J*0):
GO SUB 7250: NEXT J
7210 RETURN
7220 FOR I=1 TO DIM: LET XRT=FN
X(Z(I,1)): POKE DIREC+2+I,XRT+(X
RT-255)*(XRT=0)+255*(XRT=255):
NEXT I
7225 FOR I=1 TO DIM: LET YRT=FN
Y(Z(I,2)): POKE DIREC+2+1+YRT+
(YRT-175)*(YRT=0)+175*(YRT=175)
: NEXT I
7226 RETURN
7230 PLOT OVER BOR: PEEK (DIREC+2
): PEEK (DIREC+3): FOR I=2 TO DIM
DRAW OVER BOR: PEEK (DIREC+2+I)
-PEEK (DIREC+2+I-2): PEEK (DIREC+
2+I+1)-PEEK (DIREC+2+I-1): NEXT
I: RETURN
7250 LET NUM1=NUM: GO TO 7255
7251 LET NUM1=INT (NUM/10+FN E(U
NIX*(EJE=1)+UNIFY*(EJE=0))+.001
)
7255 LET A$=STR$ NUM1: LET XP=PL
OX-(5*(EJE=0)+2.5*(EJE=1))+LEN
A$: FOR I=1 TO LEN A$: LET XP=FN
N V(XP,PLOY,(CODE (A$(I))-48)+A
$(I)<>"-")+(A$(I)<>"-")+10+(A$(I)
)= "-"*11+(A$(I)="-"): NEXT I
7260 RETURN
7270 LET CONT=0: LET Y1=Y0
7272 LET CONT=CONT+1: LET Y2=Y1-
FN F(X,Y1)/(FN F(X,Y1+16-3)-FN F
(X,Y1+16-6)/1000
7273 IF CONT<50 THEN PRINT "PARA
X$=", X: NO HAY SOLUCION": PAUSE
300: RETURN
7275 IF ABS (Y2-Y1)>ABS Y2/200+1
E-3 THEN LET Y1=Y2: GO TO 7272
7280 LET Y=Y2: RETURN
7300 LET XMAX=Z(I,1): LET XMIN=Z
(I,1): LET YMIN=Z(I,2): LET YMAX
=YMIN: FOR I=1 TO DIM
7305 LET XMAX=XMAX+(Z(I,1)-XMAX)
+(Z(I,1)*XMAX)
7310 LET XMIN=XMIN+(Z(I,1)-XMIN)
+(Z(I,1)*XMIN)
7315 LET YMIN=YMIN+(Z(I,2)-YMIN)
+(Z(I,2)*YMIN)
7320 LET YMAX=YMAX+(Z(I,2)-YMAX)
+(Z(I,2)*YMAX)
7325 NEXT I: LET DX=XMAX-XMIN: L
ET DY=YMAX-YMIN
7330 LET DX=ABS XMAX: LET DX=4
0X+ABS XMIN-40X+(40X<ABS XMIN)
7335 LET DY=ABS YMAX: LET DY=4
0Y+ABS YMIN-40Y+(40Y<ABS YMIN)
7336 LET DX=40X+(40X<2+DX): LET
DY=40Y+(40Y<2+DY)
7337 LET DX=DX: LET DX=DX+(40
X-40X)*(40X<DX)
7339 LET DY=DY: LET DY=DY+(40
Y-40Y)*(40Y<DY)
7341 LET DX=1.15+DX: LET UNIX=
(INT (DX/10+FN E(DX))+1)+10+(F
N E(DX))-1
```

```
7343 LET DY=1.15+DY: LET UNIFY=
(INT (DY/10+FN E(DY))+1)+10+(F
N E(DY))-1
7345 LET ORIX=(INT (XMIN/UNIX)+
UNIX)+(40X<0)+(40X=0)+(INT (XMI
N/10+FN E(UNIX))+10+FN E(UNIX))+
7350 LET ORY=(INT (YMIN/UNIFY)+
UNIFY)+(40Y<0)+(40Y=0)+(INT (YMI
N/10+FN E(UNIFY))+10+FN E(UNIFY))
7355 RETURN
7360 LET HOR=0: FOR I=1 TO 10: L
ET PLY=ORY+5
7362 FOR K=1 TO 10: FOR L=0 TO 1
: LET LON=5-2*(L=1): LET PLX=ORY
+1+16: LET BOR=(LON=0)+(L=1): G
O SUB 7450: LET PLY=PLY+LON+4: N
EXT L: NEXT K
7365 NEXT I
7367 LET HOR=1: FOR I=1 TO 10: L
ET PLX=ORX+5
7369 FOR K=1 TO 10: FOR L=0 TO 1
: LET LON=5-2*(L=1): LET PLY=ORY
+1+16: LET BOR=(LON=0)+(L=1): G
O SUB 7450: LET PLX=PLX+LON+4: N
EXT L: NEXT K
7391 NEXT I: RETURN
7400 IF ORDEN=0 THEN LET ORIX=0
RX: LET ORY=0: GO SUB 7420
7403 IF ORDEN=1 THEN LET ORIX=0
RX-8: LET ORY=ORY: GO SUB 7420
LET ORIX=ORX: LET ORY=ORY-8: G
O SUB 7420
7405 IF ORDEN=2 THEN FOR K=0 TO
1: FOR L=0 TO 1: LET ORIX=ORX+(
-12+8*(L)*K: LET ORY=ORY+(12+8*
L)*(K=0): GO SUB 7420: NEXT L: N
EXT K: RETURN
7410 RETURN
7420 FOR I=1 TO 10: FOR J=1 TO 1
0: PLOT OVER BOR: ORIX+16+1: ORY+
16+J: NEXT J: NEXT I: RETURN
7430 LET PLX=ORX: LET PLY=ORY: L
ET LON=8+20: LET HOR=1: GO SUB 7
450: LET HOR=0: GO SUB 7450
7435 LET PLY=ORY-1: LET LON=2: F
OR I=1 TO 10: LET PLX=ORX+1+16
GO SUB 7450: NEXT I: LET HOR=1:
LET PLX=ORX-1: FOR I=1 TO 10: L
ET PLY=ORY+1+16: GO SUB 7450: NE
XT I: RETURN
7450 PLOT OVER BOR: PLX: PLY: DRAW
OVER BOR: LON+(HOR=1), LON+(HOR=0)
: RETURN
7500 CLEAR 64999: RESTORE 7550
7510 LET SUM1=0: FOR I=65000 TO
65077: READ A: LET SUM1=SUM1+A
POKE I, A: NEXT I
7520 FOR I=65400 TO 65431: READ
A: POKE I, A: LET SUM1=SUM1+A: NE
XT I
7530 FOR I=65480 TO 65527 STEP 4
: FOR J=0 TO 2: READ A: LET SUM1
=SUM1+A: POKE I+J, A: NEXT J: POK
E I+3, 0: NEXT I
7550 DATA 205,148,30,245,205,153
30,197,205,153,30,197,205,209,1
2,138,5,95,241,229,38,266,203
7560 DATA 39,200,39,199,200,111,
78,44,86,44,70,225,96,121,205,12
0,255,205,120,255,120,205,120
7570 DATA 255,205,120,255,120,24
3,120,255,138,5,6,0,7,205,4
3,45,0,0,205,45,5,1,0,197,2
05,43,45,193,201
7580 DATA 6,4,197,203,127,40,11,
67,77,245,213,229,205,223,34,225
209,241,4,11,121,23,201
7590 DATA 105,153,96,30,34,32,10
5,36,240,105,41,96,38,111,32,248
225,224,104,233,96,241,36,64,10
5,105,96,105,113,96,0,32,32,112
0
7595 GO TO 7002
7598 DEF FN V(X,Y,N)=X+Y+INTUSR 6
5000
```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## DESARROLLOS DE TAYLOR

El desarrollo de Taylor de una función en un punto es un polinomio de un grado determinado  $n$  que tiene las  $n$  primeras derivadas iguales que la función, en el punto de desarrollo. En estas condiciones, la función y el desarrollo de Taylor se parecen mucho en las proximidades de ese punto.

Este programa calcula el desarrollo de Taylor de cualquier función que se le pida. Esta debe ser introducida mediante las funciones matemáticas del teclado y sin errores, pues en caso contrario el programa daría error.

Lo hace calculando las  $n$  primeras derivadas de la función en el punto de forma exacta o de forma numérica. Los térmi-

nos hallados numéricamente, menos exactos, se presentan en la pantalla en invert video. La variable inc de la línea 100 es el incremento de  $x$  que se utiliza para calcular las derivadas numéricamente. Puede ser muy didáctico para el lector ver cómo varía la precisión al estimar numéricamente la derivada cuando se cambia esta variable.

La variable *tiempo* (en segundos) de la línea 100 es una medida del tiempo que estará el ordenador hallando las derivadas «exactamente»; a más tiempo, más derivadas son halladas exactamente, lo cual constituye una forma de comprobar la precisión de las derivadas numéricas, hallándolas primero de for-

ma exacta.

Una vez obtenido el desarrollo, el programa define las funciones  $h(x)$  y  $f(x)$  que son la verdadera función y el polinomio, respectivamente, lo que servirá al lector para comprobar en qué medida el polinomio hallado aproxima a la función en las proximidades del punto.

GO TO 120 en cualquier momento vuelve a imprimir el polinomio.

El programa tiene una posibilidad más que le hace mucho más potente y educativo. Se puede mezclar con el programa de REPRESENTACION GRAFICA que ofrecimos hace unas semanas, por lo que la función y el polinomio pueden ser dibujados.



jados en la pantalla con escalas en ordenadas y abscisas, lo que permite al lector ver la aproximación entre ambos en el intervalo elegido.

El MERGE se tiene que dar de este programa sobre el otro, es decir, todas las líneas de este programa tienen que estar tal cual en el programa unión.

GO TO 1000 dibuja la función y el polinomio. Si el intervalo es pequeño pueden coincidir los dibujos.

```

L5 10 BORDER 6: PAPER 6: INK 0: C
89 GO TO 7500
90 INPUT ME: P(1)=X(1): LINE 1#
91 INPUT PUNTO PARA EL DESARROLLO
92 "X(0)"; LINE P#; INPUT "GRADO
0 DEL DESARROLLO="; GRADO
93 INPUT "VALOR DEL SEMI EJE="; SEMI
105 DIM I(GRADO+1) LET INC=.01
109 GO SUB 5000
120 CLS PRINT AT 1,0;"TERMINO
121 LET NS=STR$(1): PRINT "
0- NS: FOR J=1 TO GRADO GO
94 SUB 5000 LET ME=P(1)+J*INC
95 U=U+ME "STR$(X(1)+X(2)+LE
96 "STR$(J)"; LET INC=(-U/ULTIMA);
+EEP 1/(2+J); J=J+1; PRINT "
125 STOP GO TO 1000
129 GO SUB 5000 LET NS=NS+1;"Y
97-STR$(X(1)+X(2)+LE
125 STOP GO TO 1000
500 LET U#=(X(1)+X(2)):" LET O
505 FOR J=1 TO 1+1 LET O#O+
NS NEXT J: RETURN "VALOR DEL SEMI
1000 "SEMI
1005 LET ME=U/10: LET V=0: LET
1030 VAL PS=SEMI: LET X1=VAL PS+SE
1010 DIM V(21,2) LET DIM=21: L
94 35+5+V LET ME=U/2 GO SUB
97 9002 LET 35+5+V LET ME=
9724 GO SUB 7002 STOP
9997 DEF FN Q(X)=VAL NS
9998 DEF FN Q(X)=VAL NS
9999 DEF FN Q(X)=VAL NS
5000 GO SUB 5049 LET TIME=TIME
LET I(1)=FN Q(VAL PS) LET ES=
1/NS LET I(1)=FN Q(VAL PS)
1 GO SUB 6000 LET (N)=FN Q(
VAL PS)
1000 GO SUB 5049 IF TIME=TIME(
1) THEN NEXT V LET W=1+
5010 LET ULTIMA=W-1: GO SUB 5050
5020 RETURN
5030 LET INC=1: FOR J=1 TO J: L
E T I(AC)=I(AC) NEXT I: RETURN
5049 LET TIME=(65536+PEEK 23674+
5050 PEEK 23673+PEEK 23672)/50: R
ETURN
5050 LET DJ=2+GRADO-ULTIMA+1:
P D 1/(2+DJ)/2+2/DJ: FOR J=1 TO
0 DJ DO
1 (X(2)+J*INC) LET VAL PS+
-(DJ+1/2)*INC NEXT J
5060 GO SUB 5100: FOR J=ULTIMA+
1 TO GRADO DO
1 (X(2)+J*INC) NEXT J
5100 FOR I=2 TO (DJ+1)/1: FOR J
=1 TO DJ-1+1 LET Z(I)=I*(I-1
)/2: LET I=I+1/2+INC NEXT J:
NEXT I: RETURN
7003 GO TO 7025
7025 LET ES=0: GO SUB 5000 IF
7120 INPUT PULSA ENTER:"; LINE B
5: RETURN
7595 GO TO 90
7600 LET X(1)=X(1)+X(54): X(1)
1+(X(56)+X(123)+X(147)+X(58))
800: DEF FN P(X)=(X+X(43)+X(45
7)+X(42)+X(47)+X(94)
8005 LET ES=0: GO SUB 5000 IF
PVAR=0 THEN LET ES="0" RETURN
8097 LET AS=ES: LET PARE=0: L
8098 LET AS=ES: LET PARE=0: L
8010 LET AS="": FOR O=1 TO LEN E
S
8012 IF ODE ES(O)<0 THEN LET b
=0: GO SUB 5000
8014 LET PARE=0: FOR I=1 TO LEN

```

```

5015 IF @CODE @S(1)=40 THEN LET NP =
5016 NP+1
5017 IF @CODE @S(1)=41 THEN LET @
5018 =1 IF NP=2 THEN GO TO 5020
5019 NEXT I PRINT FLASH 1 TURN
5020 IMPAR DE PARENTESIS STOP
5021 LET NUEVA@S+1 LET @S=@S(
5022 0+1) LET PAREN=@ GO SUB
5023
5024 IF @S="1" THEN IF @S(LEN @S
5025 1)= THEN LET @S=@S(1) TO LEN @S
5026 LET @S=0 GO TO 5027
5027 LET @S=@S+@S
5028 LET @S:=NUEVA@S IF @C=LEN @S
5029 LET @S=0 GO TO 5012
5030 IF @S="0" THEN RETURN
5031 LET @S=@S+@S THEN RETURN
5032 LET PAREN=1 DIM B(25) LET
5033 @S=1 LET NP=0 LET @S(1,2)=@S
5034 IF @S=1 TO LEN @S IF @CODE @S(1)=
5035 40 THEN LET NP=NP+1 IF NP=1 THEN
5036 LET @S=@S+@S LET @S(1,1)=NE
5037 XT 1
5038 IF @CODE @S(1)=41 THEN LET @S
5039 =@S(1) IF NP=0 THEN LET @S(1,2)
5040 =1 NEXT I
5041 NEXT I IF NP>0 THEN PRINT
5042 "IMPAR DE PARENTESIS !!!"
5043 STOP
5044 LET @S(1,1)=LEN @S+1 IF
5045 @S(2,1)=1 THEN IF @S(2,2)=LEN @S+1
5046 LET @S(2,2)=@S(2 TO LEN @S-1)
5047 GO TO 5033
5048 LET @S=0 LET @S(1)=@S
5049 FOR J=1 TO @S FOR I=@S/2
5050 LET @S(1,1)=@S(I) IF @S(I)=@S
5051 P(CODE @S(I)) IF @S(I)=@S THEN
5052 LET @S(I)=@S(2) LET @S(2)=@S(I)
5053 LET @S(1)=@S(2)
5054 IF @S(I)=@S THEN IF @S(I)=@S
5055 THEN LET @S(I)=1 LET @S(I)=1
5056 NEXT I NEXT J LET @S=@S+1
5057 GO SUB @S(100+100+@S) RETURN
5058 IF @S="1" THEN LET @S="1" RETURN
5059 IF @S="0" THEN LET @S="0" RETURN
5060 LET @S(1)=@S(1) LET @S(2)=@S(2)
5061 LET @S(3)=@S(3) LET @S(4)=@S(4)
5062 LET @S(5)=@S(5) LET @S(6)=@S(6)
5063 LET @S(7)=@S(7) LET @S(8)=@S(8)
5064 LET @S(9)=@S(9) LET @S(10)=@S(10)
5065 LET @S(11)=@S(11) LET @S(12)=@S(12)
5066 LET @S(13)=@S(13) LET @S(14)=@S(14)
5067 LET @S(15)=@S(15) LET @S(16)=@S(16)
5068 LET @S(17)=@S(17) LET @S(18)=@S(18)
5069 LET @S(19)=@S(19) LET @S(20)=@S(20)
5070 LET @S(21)=@S(21) LET @S(22)=@S(22)
5071 LET @S(23)=@S(23) LET @S(24)=@S(24)
5072 LET @S(25)=@S(25) LET @S(26)=@S(26)
5073 LET @S(27)=@S(27) LET @S(28)=@S(28)
5074 LET @S(29)=@S(29) LET @S(30)=@S(30)
5075 LET @S(31)=@S(31) LET @S(32)=@S(32)
5076 LET @S(33)=@S(33) LET @S(34)=@S(34)
5077 LET @S(35)=@S(35) LET @S(36)=@S(36)
5078 LET @S(37)=@S(37) LET @S(38)=@S(38)
5079 LET @S(39)=@S(39) LET @S(40)=@S(40)
5080 LET @S(41)=@S(41) LET @S(42)=@S(42)
5081 LET @S(43)=@S(43) LET @S(44)=@S(44)
5082 LET @S(45)=@S(45) LET @S(46)=@S(46)
5083 LET @S(47)=@S(47) LET @S(48)=@S(48)
5084 LET @S(49)=@S(49) LET @S(50)=@S(50)
5085 LET @S(51)=@S(51) LET @S(52)=@S(52)
5086 LET @S(53)=@S(53) LET @S(54)=@S(54)
5087 LET @S(55)=@S(55) LET @S(56)=@S(56)
5088 LET @S(57)=@S(57) LET @S(58)=@S(58)
5089 LET @S(59)=@S(59) LET @S(60)=@S(60)
5090 LET @S(61)=@S(61) LET @S(62)=@S(62)
5091 LET @S(63)=@S(63) LET @S(64)=@S(64)
5092 LET @S(65)=@S(65) LET @S(66)=@S(66)
5093 LET @S(67)=@S(67) LET @S(68)=@S(68)
5094 LET @S(69)=@S(69) LET @S(70)=@S(70)
5095 LET @S(71)=@S(71) LET @S(72)=@S(72)
5096 LET @S(73)=@S(73) LET @S(74)=@S(74)
5097 LET @S(75)=@S(75) LET @S(76)=@S(76)
5098 LET @S(77)=@S(77) LET @S(78)=@S(78)
5099 LET @S(79)=@S(79) LET @S(80)=@S(80)
5100 LET @S(81)=@S(81) LET @S(82)=@S(82)
5101 LET @S(83)=@S(83) LET @S(84)=@S(84)
5102 LET @S(85)=@S(85) LET @S(86)=@S(86)
5103 LET @S(87)=@S(87) LET @S(88)=@S(88)
5104 LET @S(89)=@S(89) LET @S(90)=@S(90)
5105 LET @S(91)=@S(91) LET @S(92)=@S(92)
5106 LET @S(93)=@S(93) LET @S(94)=@S(94)
5107 LET @S(95)=@S(95) LET @S(96)=@S(96)
5108 LET @S(97)=@S(97) LET @S(98)=@S(98)
5109 LET @S(99)=@S(99) LET @S(100)=@S(100)
5110 LET @S(101)=@S(101) LET @S(102)=@S(102)
5111 LET @S(103)=@S(103) LET @S(104)=@S(104)
5112 LET @S(105)=@S(105) LET @S(106)=@S(106)
5113 LET @S(107)=@S(107) LET @S(108)=@S(108)
5114 LET @S(109)=@S(109) LET @S(110)=@S(110)
5115 LET @S(111)=@S(111) LET @S(112)=@S(112)
5116 LET @S(113)=@S(113) LET @S(114)=@S(114)
5117 LET @S(115)=@S(115) LET @S(116)=@S(116)
5118 LET @S(117)=@S(117) LET @S(118)=@S(118)
5119 LET @S(119)=@S(119) LET @S(120)=@S(120)
5120 LET @S(121)=@S(121) LET @S(122)=@S(122)
5121 LET @S(123)=@S(123) LET @S(124)=@S(124)
5122 LET @S(125)=@S(125) LET @S(126)=@S(126)
5123 LET @S(127)=@S(127) LET @S(128)=@S(128)
5124 LET @S(129)=@S(129) LET @S(130)=@S(130)
5125 LET @S(131)=@S(131) LET @S(132)=@S(132)
5126 LET @S(133)=@S(133) LET @S(134)=@S(134)
5127 LET @S(135)=@S(135) LET @S(136)=@S(136)
5128 LET @S(137)=@S(137) LET @S(138)=@S(138)
5129 LET @S(139)=@S(139) LET @S(140)=@S(140)
5130 LET @S(141)=@S(141) LET @S(142)=@S(142)
5131 LET @S(143)=@S(143) LET @S(144)=@S(144)
5132 LET @S(145)=@S(145) LET @S(146)=@S(146)
5133 LET @S(147)=@S(147) LET @S(148)=@S(148)
5134 LET @S(149)=@S(149) LET @S(150)=@S(150)
5135 LET @S(151)=@S(151) LET @S(152)=@S(152)
5136 LET @S(153)=@S(153) LET @S(154)=@S(154)
5137 LET @S(155)=@S(155) LET @S(156)=@S(156)
5138 LET @S(157)=@S(157) LET @S(158)=@S(158)
5139 LET @S(159)=@S(159) LET @S(160)=@S(160)
5140 LET @S(161)=@S(161) LET @S(162)=@S(162)
5141 LET @S(163)=@S(163) LET @S(164)=@S(164)
5142 LET @S(165)=@S(165) LET @S(166)=@S(166)
5143 LET @S(167)=@S(167) LET @S(168)=@S(168)
5144 LET @S(169)=@S(169) LET @S(170)=@S(170)
5145 LET @S(171)=@S(171) LET @S(172)=@S(172)
5146 LET @S(173)=@S(173) LET @S(174)=@S(174)
5147 LET @S(175)=@S(175) LET @S(176)=@S(176)
5148 LET @S(177)=@S(177) LET @S(178)=@S(178)
5149 LET @S(179)=@S(179) LET @S(180)=@S(180)
5150 LET @S(181)=@S(181) LET @S(182)=@S(182)
5151 LET @S(183)=@S(183) LET @S(184)=@S(184)
5152 LET @S(185)=@S(185) LET @S(186)=@S(186)
5153 LET @S(187)=@S(187) LET @S(188)=@S(188)
5154 LET @S(189)=@S(189) LET @S(190)=@S(190)
5155 LET @S(191)=@S(191) LET @S(192)=@S(192)
5156 LET @S(193)=@S(193) LET @S(194)=@S(194)
5157 LET @S(195)=@S(195) LET @S(196)=@S(196)
5158 LET @S(197)=@S(197) LET @S(198)=@S(198)
5159 LET @S(199)=@S(199) LET @S(200)=@S(200)
5160 LET @S(201)=@S(201) LET @S(202)=@S(2
```

```

8130 ("++s(2) TO LEN a$)+")": GO TO 8130
8131 LET a$=CHR$ 0+"++s(2 TO LEN a$)+": GO TO 8130
8132 FOR i=0 TO 100: LET c$=a$(i)
8133 LET a$=a$(1 TO i-1)+c$+a$(i+1 TO LEN a$)
8134 RETURN
8200 LET c$=a$(b(2)+1 TO b(3)-1)+
8201 "++s(2 TO b(3)-1)+": LET c$=c$+"++s(
8202 b(3)+1 TO b(4)-1)": NEXT i: IF
8203 F>no>3 THEN LET c$="++c$+"
8204 "++s(2 TO b(2)-1)": GO SUB 8480
8205 LET pvar2=pvar2+c$+LET
8206 c$=GO SUB 8480: LET pvar2=pvar2+
8207 IF pvar1+pvar2>0 THEN LET a$=
8208 a$(1 TO b(2)-1)+c$+"CHR$ 0"+"++s(
8209 1)+c$+"++s(1 TO b(2)-1)+":
8210 RETURN
8220 IF pvar2>0 THEN LET a$=a$(
8221 1 TO b(2)-1)+c$+"CHR$ 0"+"++s(1
8222 TO b(2)-1)+": LET c$="++c$+"
8223 LET a$=c$+"++s(1 TO b(2)-1)
8224 "+": LET c$="++c$+"
8225 RETURN
8300 LET c$=""
8310 FOR i=1 TO no: LET d$=a$(b(
8311 i)+1 TO b(i+1)-1): GO SUB 8480
8312 IF pvar2=0 THEN NEXT i: GO TO 835
8320 LET c$=""
8330 LET d$=""
8340 FOR i=1 TO no: LET d$=a$(b(i)+1
8341 TO b(i+1)-1): NEXT i: GO TO 835
8350 LET c$=""
8360 LET d$=""
8370 LET a$=b(1)+1 TO b(2)-1: THEN
8371 "++s(1 TO b(2)-1)": LET c$=c$+"
8372 "++s(1 TO b(2)-1)": LET c$=c$+"
8373 "++s(1 TO b(2)-1)": LET c$=c$+"
8374 "++s(1 TO b(2)-1)": LET c$=c$+"
8375 "++s(1 TO b(2)-1)": LET c$=c$+"
8376 "++s(1 TO b(2)-1)": LET c$=c$+"
8377 "++s(1 TO b(2)-1)": LET c$=c$+"
8378 "++s(1 TO b(2)-1)": LET c$=c$+"
8379 "++s(1 TO b(2)-1)": LET c$=c$+"
8380 LET c$=c$+CHR$ p$+q$: NEXT
8381
8390 IF (c$(1 TO 2)="++")+(c$(1
8391 TO 2)="++") THEN LET c$=c$(3 TO
8392 LEN c$)
8393 IF (c$(1)="++") THEN LET c$=c$(
8394 2 TO LEN c$)
8395 IF paren=1 THEN LET a$="++"
8396 RETURN
8397 LET c$=c$: RETURN
8400 LET d$=a$(b(1)+1 TO b(2)-1)
8401 GO SUB 8480: IF pvar>0 THEN LET
8402 d$=CHR$ 0+"++s+q$": GO TO 84
8410
8420 LET c$=""
8430 LET no=0: LET d$=a$(b(1)+1
8431 TO b(2)-1)-1: GO SUB 8480
8432 IF pvar>0 THEN LET c$=c$+a$(b(
8433 1)+1 TO b(2)-1)+c$+"++s+q$":
8434 "CHR$ 0"+"++s+q$":
8435 IF paren=1 THEN LET
8436 a$="++c$+"
8437 RETURN
8420 LET a$=c$: RETURN
8480 IF d$="" THEN LET pvar=0: R
8490
8490 LET pvar=0: LET fin=LEN d$-
8491 LEN a$+1: FOR p=1 TO fin: IF d$(p
8492 TO p+LEN LEN a$)=1 THEN IF d$(
8493 p+1 TO p+LEN LEN a$)=0+1 (p=
8494 1)+(p=1 (CODE d$(p+LEN LEN a$-
8495 (p=1))=0)+(p=fin))=1 THEN LET pvar
8496 =1
8497 RETURN
8498 NEXT p: RETURN

```

TODAS LAS LETRAS MAYUSCULAS SUBRAYADAS DEBERAN TECLEARSE EN MODO GRAFICO





# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## INTEGRALES INDEFINIDAS I

Por cuestiones de espacio, el programa de esta semana hemos tenido que dividirlo en dos. Ninguna de las partes puede funcionar sin la otra, sin embargo, hemos procurado que esta primera tuviera cierta autonomía y no tuvierais que esperar a la semana que viene para correr el programa.

El programa en su conjunto es muy potente en lo que se refiere al cálculo de integrales definidas e indefinidas. No queremos que nadie crea que calcula la primitiva de una función, lo que hace es definir una función FNI(x) que es una aproximación muy buena de la integral pedida.

Esta primera parte del programa sólo puede hallar integrales definidas de una función, aunque lo hace con gran precisión y rapidez. A pesar de que en la pantalla aparece un menú

con cuatro opciones, sólo la de integrales definidas funciona. Las otras tres son: integrales indefinidas, dibujo de la función, y dibujo de la función integral.

Para poder utilizar estas dos últimas opciones es necesario dar MERGE de este programa completo sobre el de «Representación Gráfica» que os ofrecimos hace unas semanas y que permite dibujar una función con una escala graduada horizontal y vertical para la perfecta visualización de la función.

Algunos lectores nos han escrito diciendo que tienen problemas a la hora de teclear la línea 9999 que aparece en éste y en otros programas anteriores, el problema consiste en introducir la cadena ":RETURN: REM" ya que dentro de las comillas no aparece el RETURN ni el REM, lo que se

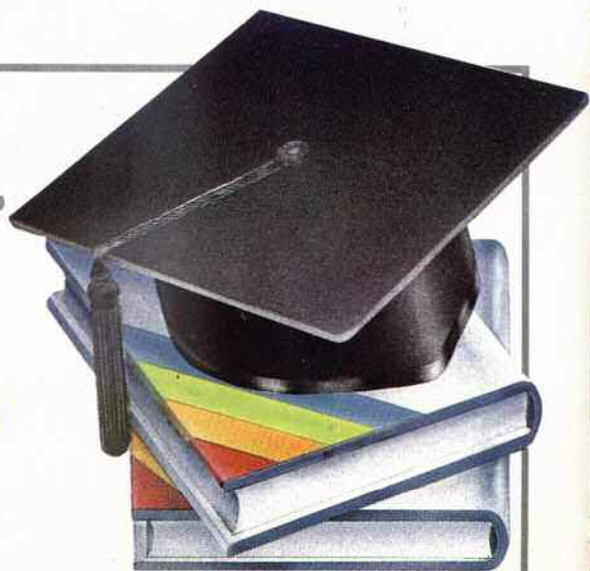
hace es teclear :RETURN: REM sin comillas y después poner las comillas a los lados. También tenemos que avisaros que es muy importante que esa línea esté escrita literalmente como viene en el listado, sin omitir ni incluir nada.

Os recomendamos que proveáis el programa con funciones de las que ya conozcáis su primitiva y comparéis los resultados exactos y el que os da el programa. Esto lo podéis hacer tanto en integrales definidas como en indefinidas, y comparar las distintas aproximaciones.

El de integrales definidas pide un número llamado precisión, que también hace crecer el tiempo de ejecución que no siempre es

conveniente que sea grande, si la función es sencilla o el intervalo de integración pequeño es mucho más rápido, elegir un número pequeño y el resultado sigue siendo fiable.

Conviene recordar que hay que tener cuidado al introducir las funciones en el ordenador. Por una parte, el programa la admitirá esté bien o mal escrita aunque luego dará error. Y por otra parte, el Spectrum no eleva números negativos a otros por lo que los polinomios y las funciones potenciales no pueden tener argumentos negativos, o dará error.



TODAS LAS LETRAS MAYUSCULAS SUBRAYADAS DEBERAN TECLEARSE EN MODO GRAFICO

```

3799 GO TO 7500
3800 LET menu1=3: LET y0=0
3810 DIM v(21,2): LET dim1=21: L
ET menu2=2
3815 GO SUB 4000
3820 DATA "MENU", "1- INT
EGRAL DEFINIDA", "2- INTEGRAL IN
DEFINIDA", "3- DIBUJAR FUNCION", "4
- DIBUJAR INTEGRAL"
3830 CLS: RESTORE 3820: FOR i=1
TO 5: READ z$: BEEP 1/(i+2): i=i+2
: PRINT AT 3+2*i, 4: z$: NEXT i
3840 LET paw=0: LET mun=CODE INK
CV$: IF (mun<48)+ (mun<53) THEN L
ET paw=paw+1: CLS: GO SUB (6120+(m
un-49)+4010*(mun-50)+4500*(mun-5
1)+4525*(mun-52))
3850 GO TO (3840-paw)
4000 LET tiempo=120: LET inc=.1
: LET grado=10
4002 BORDER 6: PAPER 6: INK 0: C
LS
4005 LET vs="" : FOR w=1 TO grado
+1: LET vs=vs+"k(n,"+STR$ w")+x
+"(" : NEXT w
4007 LET vs=vs+"k(n,"+STR$ (grad
o+2))+")"
4008 FOR w=1 TO grado+1: LET vs=
vs+"(" : NEXT w
4009 RETURN
4010 INPUT "Mete f(x)=": LINE js$
: INPUT "Origen de integracion=":
"x0=": INPUT "Extremo del in
tervalo de=": "integracion x1=":
:
4015 INPUT "MAXIMO ERROR DE INTE
GRACION=": "ERROR"
4020 GO SUB 5000
4023 LET gre=grado+(ult+5-grad)
+ult+5: grado=0
4024 DIM k(5,12)
4025 DIM x(5): LET derm=0: FOR p
=1 TO 5: LET x(p)=x0+(p-1)/4*(x1
-x0): GO SUB 5050: LET put=ABS k
(p,gre+2): LET derm=derm+put+AB
S (derm-put)/2: NEXT p
4035 LET delt=(2*error/(derm+1e-
27))+1/(gre+1)
4040 LET delt=delt+(x1-x0)/20+AB
S (delt-(x1-x0)/20)/2
4050 LET puntos=INT ((x1-x0)/delt
+1)+1
4060 DIM x(puntos): DIM k(puntos
,grado+2)

```

```

4070 FOR i=1 TO puntos: LET x(i)
=x0+delt*(i-1): NEXT i
4080 FOR p=1 TO puntos: LET x=x(
p)
4082 FOR w=1 TO ult+1: LET o=w+1
: LET i=$K(p,o): SVAL "CHR$(105
+w)+$": GO SUB 9999: LET k(p,w+
1)=k(p,w+1)/FN j(w): NEXT w
4090 GO SUB 5050: NEXT p
4100 LET clx=0: FOR p=1 TO punto
s: LET k(p,1)=clx-FN i(x(p)-idelt
/(2+1e-5))+p+1): LET clx=FN i
(x(p)+delt/(2+1e-5))
4110 NEXT p
4120 PRINT AT 3,0: "LA FUNCION IN
TEGRA, FN i(x), ESTA HALLADA"
: VUELVO AL MENU"
4125 PAUSE 300: RETURN
4500 LET qs=js+"y": GO SUB 7002
4510 RETURN
4525 CLS: LET qs="FN i(x)-y": G
O SUB 7002: RETURN
4994 DEF FN i(x)=FN g(x-x)INT ((
x-x0)/delt+1.5)):INT ((x-x0)/del
t+1.5))
4995 DEF FN g(x,n)=VAL vs
4996 DEF FN i(x,n)=ABS x*n+(SGN
(2*INT ABS (n/2)-ABS n+1e-20))*x
(x0)+(x)=0)
4997 DEF FN j(x)=(x<=1)+2*(x=2)+
6*(x=3)+24*(x=4)+120*(x=5)+720*(
x=6)+5040*(x=7)+40320*(x=8)+3628
80*(x=9)+3628800*(x=10)+39916800
*(x=11)
4998 DEF FN h(x)=VAL js$
4999 DEF FN d(x)=VAL es$
5000 GO SUB 5049: LET timeo=time
: LET es$="" : FOR w=2 TO grado+1
: LET is$="" : GO SUB 8000: LET is
=CHR$(105+w)+$es$: GO SUB 999
9
5005 GO SUB 5049: IF time-timeo<
timepo THEN NEXT w: LET w=w-1
5010 LET ultima=w-1: LET ult=ult
ima
5020 RETURN
5040 LET fac=1: FOR i=1 TO j: LE
T fac=fac*i: NEXT i: RETURN
5049 LET time=(65536+PEEK 23674+
256+PEEK 23673+PEEK 23672)/50: R
ETURN
5050 LET dzj=2*(grado-ultima)+1:

```

```

DIM z((dzj+1)/2,dzj): FOR j=1 T
O dzj: LET z(1,j)=FN d(x(p)+1j-(
dzj+1)/2)+inc: NEXT j
5060 GO SUB 5100: FOR j=ultima+1
TO grado+1: LET k(p,j+1)=z(j-ult
ima,dzj+1)/2)/FN j(j)+j*ult+7
: NEXT j: RETURN
5100 FOR i=2 TO (dzj+1)/2: FOR j
=i TO dzj+1: LET z(i,j)=(z(i-1
,j+1)-z(i-1,j-1))/2/inc: NEXT j:
NEXT i: RETURN
6120 INPUT "Mete la funcion f(x)
=": LINE ws$
6130 INPUT "LIMITE INFERIOR = ":
asd
6140 INPUT "Limite superior = ": b
6150 INPUT "Precision (3 a 9) = ":
jsd
6175 LET dsd=(bsd-asd)/27:jsd
6180 LET x=asd: LET isd=VAL ws$
6200 FOR x=asd+2*dsd TO bsd STEP
2*dsd: LET jsd=VAL ws$: LET isd=
isd+2*jsd
6210 NEXT x
6220 LET isd=isd-jsd
6240 FOR x=asd+dsd TO bsd STEP 2
*dsd: LET jsd=VAL ws$: LET isd=is
d+jsd
6245 NEXT x
6250 LET isd=isd+dsd/3
6260 PRINT AT 5,0: "La integral p
edida vale: ", "isd" : Pu
lsa una tecla para MENU"
6270 PAUSE 0: RETURN
7003 GO TO 7025
7028 LET pasa=0: GO TO 7063
7120 INPUT "PULSA ENTER PARA CON
TINUAR": LINE bs$: RETURN
7595 GO TO 3800
8358 LET as$="" : RETURN
9999 LET args=PEEK 23627+256+PEE
K 23628: FOR i=1 TO (LEN is$+19-
LEN bs$+LEN is$19)): POKE (args
-25+i),CODE (is(i)): NEXT i: FOR
j=1 TO 4: POKE (args-25+i+j-1),
CODE " ": RETURN: REM "(j): NEXT
j: LET k(p,o)=VAL is$: RETURN: R
EM: REM VAL bs$: RETURN: REM

```

# Profesor particular

Arturo Lobo y J. J. León

## CIRCUITOS ELECTRICOS (1)

Esta semana os presentamos la primera parte de un programa que permite representar en la pantalla un circuito eléctrico y obtener la solución. Aunque están pensados para correr juntos, éste de hoy sólo ya representa el circuito, de forma que, si queréis, podéis dibujar con él en la pantalla. Los resultados internos que obtiene serán utilizados por la segunda parte.

En el circuito están permitidas resistencias, autoinducciones, condensadores y fuente de tensión e intensidad, con corriente continua o alterna. La forma de resolver un circuito es la siguiente: primero dibujáis el mismo en un papel, numerando sus nudos. Es indispensable que todas

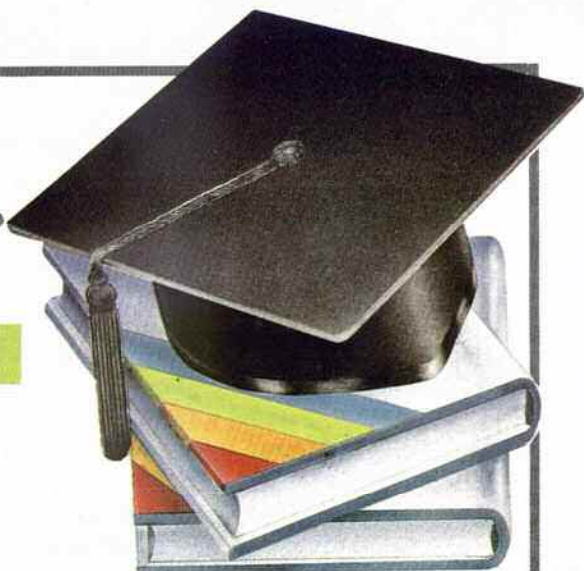
las ramas sean horizontales o verticales (podéis meter ramas sin componentes). Para nosotros un nudo será cualquier punto de un circuito que vosotros queráis que lo sea, y obligatoriamente todas las uniones de varias ramas y todos los puntos donde una rama cambie de dirección. El origen de potenciales se toma automáticamente en el nudo 1, así que donde queráis situar ese origen debéis colocar ese nudo. El programa obtiene el potencial (y fase en su caso) en todos los nudos (con referencia al primero), de modo que donde os interese conocerlo tenéis que poner un nudo también. Una vez dibujado en un papel el circuito y fijados los nudos, llamaremos rama a toda unión de

dos nudos que, como ya hemos dicho, deberá ser horizontal o vertical.

En este punto deberéis correr el programa, introducir el número total de nudos y luego, desplazando un cursor que aparece con las teclas  $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\uparrow$  y  $\downarrow$ , posicionar los nudos. Para fijarlos se debe pulsar la tecla «n». Los nudos se numeran automáticamente. Debéis dejar entre nudos espacio suficiente para introducir los componentes que queráis.

Una vez hecho esto, os pedirá el programa el número de ramas que vais a intro-

ducir y luego, una por una, os pide entre qué dos nudos está, y el valor de R, L, C, I o V. Debéis introducir cero cuando no queráis ese componente y su valor cuando lo queráis (en el próximo programa os explicaremos las unidades). Sólo está permitida una fuente (de tensión o de intensidad) por rama. El sentido queda desde el nudo inicial al final, a no ser que introduzcáis 180 grados de fase. La próxima semana os acabaremos de explicar el funcionamiento.



TODAS LAS LETRAS MAYUSCULAS SUBRAYADAS DEBERAN TECLEARSE EN MODO GRAFICO

```

5 GO SUB 50
10 FOR i=0 TO 27: READ a: POKE
  USA 3: NEXT i
20 DATA 24,90,24,255,255,24,90
24,32,32,80,144,9,10,4,4
22 DATA 35,92,148,162,34,34,34
28,136,50,41,69,68,68,80,56
24 DATA 102,102,102,231,102,10
2,102,102,126,129,129,199,169,16
9,145,126
26 DATA 8,4,3,12,48,192,32,16,
12,2,134,130,134,121,1
26 DATA 1,121,134,130,134,121,
2,12,6,255,255,0,0,255,255,8,126
137,129,153,137,137,157,126
30 INPUT "¿Cuántos nudos vas a
  introducir?":n: DIM a(n,2): CLS
40 LET nr=1: LET x=0: LET y=0
  LET b=0: GO TO 140
50 PRINT "PRESENTACION DE
  SOLUCION EN PANTALLA DE CIRCU"
600 ELECTRICOS: RETURN
100 LET as=INKEY$: IF (CODE as=
  8 OR CODE as=11) AND as<"n" THEN
  N GO TO 100
105 LET b=b+1: GO TO 140
110 LET x=x+(CODE as=9 AND x<3)
  0:-(CODE as=8 AND x<0)
120 LET y=y+(CODE as=10 AND y<
  21):-(CODE as=11 AND y<0)
140 PRINT AT y,x: OVER 1:CHR$
  44: IF b=1 THEN LET b=0: GO TO 1
  10
150 IF INKEY$="n" THEN PRINT AT
  y,x:"X" PRINT AT 0,0: INVER
  SE 1:n: LET q(n,1)=x: LET q(n,
  2)=y: LET nn=nn+1: PAUSE 0: IF
  nn=1 THEN GO TO 170
160 GO TO 100
170 PRINT AT 0,0:"NUDOS A IN
  TRODUCIR LAS RAMAS:" (Pulsa una
  tecla): PAUSE 0
180 INPUT "numero de ramas: ",n
  rs: DIM r(nrs,10)
190 FOR k=1 TO nrs: INPUT "nudo
  origen r(k,1):" hasta "r(k,2)
195 GO TO 3100
200 RESTORE 250
210 FOR j=4 TO 0: READ as

```

```

220 INPUT (as)?"":r(k,j)
230 IF j=7 AND r(k,7) THEN INPUT
  T:"fase de la tension":r(k,8)
240 IF j=8 AND r(k,8) THEN INPUT
  T:"fase de la intensidad":r(k,1
  0)
245 NEXT j
250 DATA "RESISTENCIA","INDUCTA
  NCIA","CONDENSADOR","FUENTE DE T
  ENSION","FUENTE DE INTENSIDAD"
260 LET i=r(k,1): LET j=r(k,2)
  LET nr=nr+1
270 GO SUB 500: NEXT k
500 LET q1=q(i,1)-(q(i,1)-q(j,1
  ))*(q(j,1)-q(i,1))
503 LET q2=q(i,2)-(q(i,2)-q(j,2
  ))*(q(j,2)-q(i,2))
506 PLOT 4+8*q1,172-8*q2
510 LET ix=ABS(q(j,1)-q(i,1))
  LET iy=ABS(q(j,2)-q(i,2))
520 DRAW 8+ix,-8+iy: LET (on=2+
  ((1.5*(r(nr,4)<0)+(r(nr,5)<0))
  +(r(nr,6)<0)+(r(nr,7)<0)+(r(nr,
  8)<0))+1
530 IF ix+iy<10 THEN PRINT AT
  0,0:"No hay sitio": Introduc de
  nuevo los nudos: PAUSE 0: CLS
  GO TO 30
540 LET gdu=145+S*NOT ix
550 PRINT AT g+INT((ix+iy-ton)
  /2):NOT ix,q1+INT((ix-ton)/2)*N
  OT iy
560 IF r(nr,4) THEN PRINT CHR$
  gdu: GO SUB 3000+30*NOT iy: PRI
  NT CHR$ gdu: GO SUB 3000: IF iy
  THEN GO SUB 3010
570 IF r(nr,5) THEN PRINT CHR$
  (gdu+1): GO SUB 3000+30*NOT iy
  PRINT CHR$ (gdu+2): GO SUB 300
  0: IF iy THEN GO SUB 3010
590 IF r(nr,6) THEN PRINT CHR$
  (gdu+3): GO SUB 3000: IF iy THE
  N GO SUB 3010
600 IF r(nr,7) THEN PRINT CHR$
  149
610 IF r(nr,8) THEN PRINT CHR$
  154
620 RETURN
3000 GO SUB 3040: PRINT AT xx,yy
  +1-2*NOT ix: IF ix THEN RETURN
  3010 GO SUB 3040: PRINT AT xx+1,
  yy,

```

```

3030 RETURN
3040 LET xx=24-PEEK 23689: LET y
  =33-PEEK 23688: RETURN
3100 IF q(k,1,1)=q(k,2,1)
  OR q(k,1,2)=q(k,2,2) THEN
  GO TO 200
3110 PRINT #0:"Nudos no alineado
  s": PAUSE 0: LET i=i-1: NEXT k
3000 DIM z(dim,2): DIM x(2)
  8010 LET i=1
3020 LET j=1
3030 IF z(j,1,1)<=1e-6 THEN LET
  j=j+1: GO TO 8030
3040 IF j<2 THEN FOR k=1 TO dim
  : FOR l=1 TO 2: LET x(l)=z(j,k,l)
  : LET z(j,k,l)=z(l,k,l): LET z(
  l,k,l)=x(l): NEXT l: NEXT k
3050 IF i=dim-1 THEN GO TO 8090
3060 LET i=i+1
3070 FOR k=i+1 TO dim: GO SUB 82
  00: NEXT k
3080 LET i=i+1: GO TO 8020
3090 LET i=i+2
3100 FOR k=i-1 TO 2 STEP -1
  3110 GO SUB 8200: NEXT k
3120 LET i=i-1: IF i=2 THEN GO
  TO 8090
3130 FOR i=1 TO dim-1
  3140 LET z(i,dim,1)=z(i,dim,1)/z
  (i,1,1)
3150 LET z(i,dim,2)=z(i,dim,2)/z
  (i,1,2)
3160 NEXT i: RETURN
3200 IF z(k,1,1)=0 THEN RETURN
3210 LET x(1)=z(i,1,1)/z(k,1,1)
  3220 LET x(2)=z(i,1,2)/z(k,1,2)
  3230 FOR l=1 TO dim
  3240 LET x=l*(x(1,1)+x(1,2)*x(1,
  2))
3250 LET z=z(i,1,1)
3260 LET xx=x+COS y-z+COS z(i,1,
  2)
3270 LET yy=x+SIN y-z+SIN z(i,1,
  2)
3280 LET z(k,l,1)=(xx+xx+yy+yy)*
  .5: LET z(k,l,2)=ATN(yy/(xx+ixx
  =0)): IF SGN yy+yy=0):+ixx(0)*PI
  3295 IF xx=0 THEN LET z(k,l,2)=P
  I/2+SGN y
3290 NEXT l: RETURN

```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## INTEGRALES INDEFINIDAS 2

Como ya os anunciamos en el número anterior, esta semana os ofrecemos la parte que faltaba del programa integrales indefinidas. Para cargarlo podéis hacer dos cosas; o bien teclear éste y luego dar MERGE sobre el otro, o bien cargar la primera parte en el ordenador y luego teclear estas líneas encima de las otras.

Como también explicamos, por sí sola ninguna de las dos partes funciona.

El programa ofrece un menú de cuatro opciones: integrales definidas, indefinidas, dibujo de la función y dibujo de la función integral.

Antes de dibujar, el programa tiene que haber pasado por la opción de integrales indefinidas; esta opción obtiene la  $\int x_0 f(x) dx$

para un intervalo dado (no en todo el eje real) y con un error dado. Este error se tiene que elegir de acuerdo con los valores previsible de la integral, es absurdo que si la integral hasta un punto valiera 10.000, pedirle un error de  $10^{-3}$  por que el programa podría tardar mucho tiempo y no merecer la pena la precisión ganada.

Nosotros recomendamos que se halle la integral hasta un punto mediante la opción de integrales definidas y luego, se escoja un error del 1 por 100 o por mil de ese valor, además esa operación servirá para comparar los valores obtenidos en las dos opciones.

El programa deja definida la función  $FN_i(x)$  que es la función integral. Siempre vuelve al menú, pero si queréis explorar la función  $i(x)$

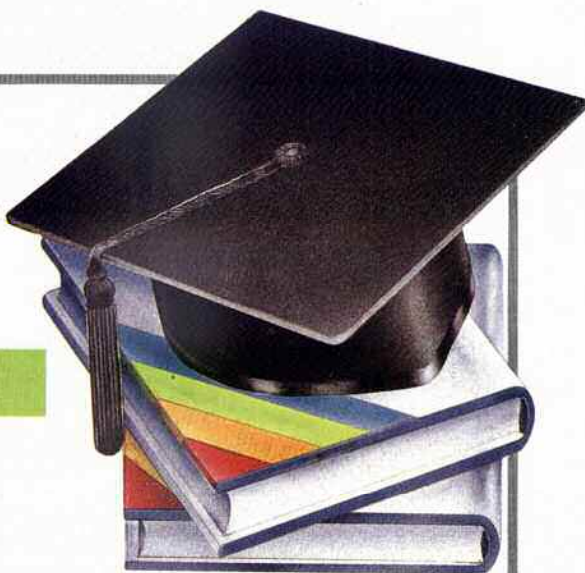
basta con dar BREAK en el menú y GO TO 3830 cuando queráis volver.

La variable tiempo que aparece en la línea 4000 es una medida de lo que tarda el programa; aumentando ésta pódéis aumentar la precisión y, en algunos casos, incluso disminuir el tiempo de ejecución cuando el intervalo de integración es grande. Probar con funciones cuya primitiva conozcáis y comprobar la precisión del programa y los tiempos de ejecución, que tenemos que decir que pueden ser elevados, de varios minutos en general.

Podéis, además, ver dibujada tanto la función como

su integral en pantalla con las opciones 3 y 4, aunque para ello tenéis que dar MERGE de este programa sobre el de «Representación Gráfica» que os ofrecimos en números pasados; comprobar que las líneas 7000 de este programa son las del listado.

Cuando escribáis la función a través del Spectrum, tenéis que tener en cuenta que hay que hacerlo con las funciones del teclado y que la operación potencia del Spectrum no permite elevar un número negativo a otro número, por lo que puede dar error si las funciones introducidas toman valores negativos elevados a algo.



TODAS LAS LETRAS MAYUSCULAS SUBRAYADAS DEBERAN TECLEARSE EN MODO GRAFICO

[illegible][illegible][illegible]

# Profesor particular

Arturo Lobo y J. J. León

## CIRCUITOS ELECTRICOS (y 2)



Aquí tenéis ya la segunda parte del programa que, como os decíamos, os permitirá resolver inducciones, condensadores y fuentes de tensión e intensidad. Este programa debéis grabarlo con MERGE encima del anterior.

Y ahora, continuando con la explicación de hace catorce días, os especificamos las unidades en que debéis meter los valores en el programa: Resistencia en ohmios, inductancia en Henrios, capacidad en faradios, tensión en voltios e intensidad en amperios; esto es, unidades del sistema internacional siempre. Recordad

que en una rama no podéis poner más de una fuente, aunque siempre podéis hacerlo sin más que introducir un nudo en medio.

Después de pedir los datos del circuito, el programa os pedirá la frecuencia de las fuentes. Si vuestro problema es de corriente continua, cualquier valor valdrá (por ejemplo 1). Para resolver fuentes de diversas frecuencias, así como señales no senoidales debéis aplicar superposición. La frecuencia debe introducirse en ciclos por segundo.

Después de ello, sólo resta esperar los resultados. Por desgracia el

tiempo de resolución es muy alto, del orden de varios minutos, dependiendo de la complicación del circuito. Para resolverlo soluciona un sistema lineal de ecuaciones complejas y por tanto debemos haceros dos advertencias: En primer lugar, conviene introducir valores de impedancias de semejante orden de magnitud, para reducir los errores de redondeo, ya que un circuito sencillo no bajará nunca de, al menos, 10 ecuaciones que hay que resolver por operaciones elementales. Y, en segundo lugar y por la misma causa, en los resulta-

dos se consideran cero los potenciales de menos de una décima de milivoltio. En corriente continua 180 grados de fase indican potencial negativo.

Cuando el programa acaba de calcular emite un sonido y presenta los resultados en pantalla. Pulsando entonces la tecla c se puede ver de nuevo el circuito, si se desea, y pulsando r otra vez los resultados. Por necesidades de espacio este programa no puede correr en un SPECTRUM 16K.

TODAS LAS LETRAS MAYUSCULAS SUBRAYADAS DEBERAN TECLEARSE EN MOD0 GRAFICO

```

1000 CLEAR 57975
1001 GO SUB 2100
1002 DATA 17,144,226,33,0,64,1,0
1003 DATA 24,237,176,201
1004 DATA 33,144,226,17,0,64,1,0
1005 DATA 24,237,176,201
1006 INPUT "Introduce la frecuencia: ";f
1007 GO TO 1000
1008 PRINT AT 92+INT (1+(14-10)/2);NOT ix,q1+INT (1+(14-10)/2)
1009 LET filas=nrs: LET nudos=nn-1
1010 FOR i=1 TO nrs
1011 IF (r(i,7) OR r(i,8)) AND (r(i,4) OR r(i,5) OR r(i,6)) THEN
1012 LET filas=filas+1
1013 NEXT i
1014 DIM a(filas,5,2)
1015 LET indin=nrs+1
1016 FOR h=1 TO nrs
1017 IF NOT (r(h,7) OR r(h,8)) THEN
1018 IF NOT (r(h,4) OR r(h,5) OR r(h,6)) THEN GO SUB 2000: LET k=h
1019 GO SUB 2010: GO TO 1170
1020 LET m(indi,1)=r(h,1)
1021 LET m(indi,2)=r(h,2)
1022 LET k=indi
1023 GO SUB 2010
1024 LET r(h,1)=nn: GO SUB 2000
1025 LET nn=nn+1: LET indi=indi+1
1026 NEXT h
1027 LET xx=r(h,4)
1028 LET yy=omr(h,5)-(NOT NOT omr(h,6))/omr(h,6)+NOT omr(h,6)
1029 LET m(h,3,1)=(xx+yy+yy)*f
1030 LET m(h,3,2)=ATN (yy/(xx+(xx+yy)*fSGN yy*(yy=0)))*PI
1031 IF xx=0 THEN LET m(h,3,2)=PI/2+SGN yy
1032 NEXT h
1033 LET uv=0
1034 FOR i=1 TO filas: IF NOT (m(i,3,1) OR m(i,3,2)) THEN LET uv=uv+1
1035 NEXT i
1036 LET dim=uv+nn: LET uv=1
1037 DIM z(dim,dim,2): DIM x(2)

```

```

1245 GO TO 1000
1250 FOR i=1 TO filas
1251 LET ni=m(i,1,1)+1: LET nr=m(i,2,1)
1252 IF NOT m(i,3,1) THEN GO TO 1340
1253 LET x(1)=1/m(i,3,1): LET x(2)=1/m(i,3,2)
1254 LET z(ni,nr,1)=x(1)
1255 LET z(ni,nr,2)=x(2)
1256 LET xx=x(1)*COS x(2)+z(ni,nr,1)*COS z(ni,nr,2)+z(ni,nr,1)*SIN x(2)+z(ni,nr,1)*SIN z(ni,nr,2)
1257 LET k=ni: FOR l=ni-1 TO ni-1: GO SUB 8200: GO TO 1300
1258 IF NOT m(l,3,1) THEN GO TO 1360
1259 LET xx=sgn(m(l,3,1))*COS m(l,3,2)+z(ni,dim,1)*COS z(ni,dim,1)+z(ni,dim,1)*COS SIN z(ni,dim,2)
1260 LET yy=sgn(m(l,3,1))*SIN m(l,3,2)+z(ni,dim,1)*COS SIN z(ni,dim,2)
1261 LET k=ni: FOR l=dim TO dim: GO SUB 8200: GO TO 1500
1262 LET z(ni,nn-1+uv,1)=1
1263 LET z(ni,nn-1+uv,2)=PI*(sgn xx=-1)
1264 LET z(ni+uv,ni-1,2)=PI
1265 LET z(ni+uv,ni-1,1)=1
1266 LET z(ni+uv,ni,2)=0
1267 LET z(ni+uv,ni,1)=m(i,4,1)
1268 LET z(ni+uv,dim,2)=m(i,4,2)
1269 LET uv=uv+1
1270 NEXT i
1271 FOR i=1 TO filas
1272 LET m(i,1,2)=m(i,1,1)
1273 LET m(i,1,1)=m(i,2,1)
1274 LET m(i,2,1)=m(i,1,2)
1275 NEXT i
1276 RETURN
1277 LET sgn=1: GO SUB 1700: GO SUB 1250
1278 LET uv=1
1279 LET sgn=-1: GO SUB 1700: GO SUB 1250
1280 LET z(1,1,1)=1
1281 RANDOMIZE USR 57976
1282 CLS: PRINT AT 11,11: FLASH

```

```

1 "CALCULANDO"
1000 GO SUB 8010
1001 FOR i=1 TO 20: BEEP .00,1: NEXT i
1002 CLS: PRINT AT 0,9:"POTENCIAL";AT 0,24:"FASE";AT 1,0:"NUDO";AT 1,9:"(voltios)";AT 1,24:"(grados)"
1003 PLOT 0,157: DRAW 32,0
1004 PLOT 191,157: DRAW 64,0
1005 DIM a(9): DIM b(8)
1006 FOR i=1 TO nudos
1007 LET a(i)=STR$ (z(i,dim,1)*100/PI*(z(i,dim,1)=1e-4)*(ABS z(i,dim,2)=1e-4))
1008 PRINT i,TAB 9,a(i)
1009 NEXT i
1010 PRINT AT 0,0:" C CIRCUITO RESULTADOS"
1011 IF INKEY$="c" THEN CIRCUI
1012 USR 57908: GO TO 1050
1013 IF INKEY$="r" THEN GO TO 1060
1014 GO TO 1050
1015 LET m(h,1,1)=r(h,1): LET m(h,1,2)=r(h,2): RETURN
1016 FOR j=1 TO 2: FOR j=1 TO 2: 2020 LET m(k,3+j,1)=r(h,2+i+j+4)
1017 OR i=1
1018 NEXT j: NEXT i: RETURN
1019 REM "Nodos no alineados"
1020 POKE 23675,200: POKE 23676,250
1021 GO TO 57976 TO 57999
1022 READ a: POKE i,a: NEXT i
1023 RETURN
1024 PRINT #0:"Nodos no alineados"
1025 PAUSE 0: LET k=-1: NEXT i
1026 LET x(1)=z(k,1,1)/2*(1,1,1)
1027 LET x(2)=z(k,1,2)/2*(1,1,2)
1028 FOR l=1 TO dim
1029 LET xx=x(1)*z(l,1,1)+x(2)*z(l,1,2)
1030 LET xx=x(2)*z(l,1,1)+x(1)*z(l,1,2)
1031 LET yy=z(k,1,1)*SIN z(k,1,2)-x(1)*COS y
1032 LET yy=z(k,1,1)*SIN z(k,1,2)-x(1)*COS y

```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## DIBUJO TECNICO

Este capítulo es el primero que el «Profesor particular» dedica al dibujo técnico, aunque esperamos ofreceros algunos más en el futuro de esta asignatura que teníamos un tanto abandonada.

Permite introducir las tres vistas de un cuerpo (planta, alzado y vista lateral) a través del teclado y luego, las dibuja en pantalla a la escala que deseéis, las tres juntas o cada una por separado.

No pretendemos, en ningún momento, sustituir a la escuadra, cartabón y lápiz, las posibilidades gráficas del Spectrum lo hacen muy difícil. Sin embargo, el programa permite de manera amena y entretenida entrenarse en la obtención de las vistas, dada la perspectiva, lo cual confiamos que sea de gran ayuda para las personas que no tienen mucha soltura en ello.

El programa tiene una rutina máquina en las líneas 8.000

por lo que es conveniente grabarlo antes de intentar ejecutarlo, por si se ha tecleado mal.

Empieza pidiendo la altura, la anchura y la profundidad del cuerpo. La anchura es el ancho del alzado y la profundidad el ancho de la vista lateral.

Continúa pidiendo las cotas en la anchura, altura y profundidad. Aquí hay que meter todas las cotas de las vistas referidas a su esquina inferior izquierda, es decir, todas las alturas referidas a la base y todas las cotas en anchura y profundidad referidas al extremo izquierdo.

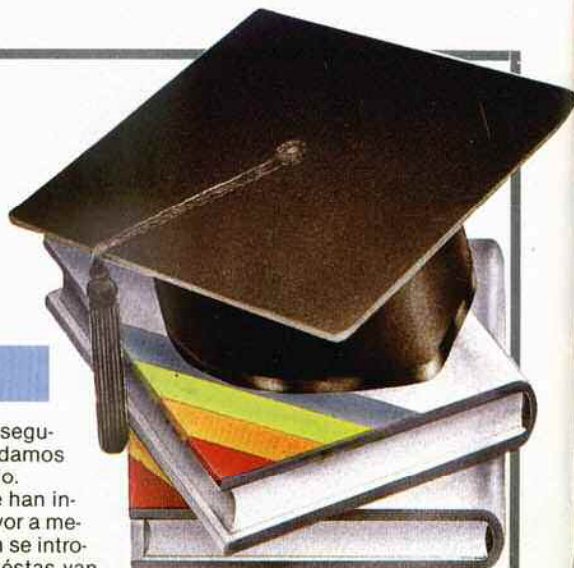
Hay que tener en cuenta que los círculos se introducen mediante dos puntos pertenecientes a él y su centro, al igual que los arcos de circunferencia, por lo que las coordenadas de estos puntos también han de ser introducidas como cotas. No tiene importancia poner alguna cota de más, pero si se pone al-

guna de menos seguramente no podamos terminar el dibujo.

Si las cotas se han introducido de mayor a menor, mejor. Según se introducen las cotas éstas van recibiendo un número. Cuando se han introducido todas aparece en la pantalla un entramado de rectas punteadas donde se dibuja la planta. Primero, todas las rectas y luego, todos los círculos.

Las rectas son de la forma 01020404 que es una recta que va del punto (1,2) al (4,4) del entramado. Si se quiere que la recta sea a trazos se pone un cero al final 010204040.

Cuando se han medido todas las rectas se pulsa ENTER y pide los arcos; son: 02 02 04 04 04 02, arco que va del punto (2,2) al (4,4) con centro en el (4,2). Los círculos son dos arcos entre puntos opuestos 02 02 04 02 04 03 y



04 02 02 02 04 03. Los arcos no pueden ser de trazos.

Cuando hemos cometido un error al meter una recta o un arco, ésta se puede rectificar metiendo otra vez la recta o el arco y al final, un 2, (no importa que sea fuera de trazos o continuo) o sea, 01 02 04 04 2 rectifica la primera recta ejemplo, que no se borra en la pantalla, pero no aparece en las representaciones posteriores.

Las rectas se tienen que rectificar antes de dibujar los arcos.

Si el dibujo contiene arco el programa podría dar error al intentar dibujar un arco fuera de la pantalla, entonces se da GO TO 1500 y se reduce la escala que es la opción con un número bajo.

[illegible]

```

1560 NEXT I=1 TO 15: IF X(9)<0 THEN IF I
1570 IF LA=LISTA THEN GOTO 1590: IF I=
1580 LET I2=(I$-1)/4
1590 INPUT "P,a,b,c,e,e",LINE Q
1600
1605 IF Q$="e" THEN THEN LET P=Q$
1610 LET VISTA=(Q$-P)/1+23:Q$="a
1615+13+Q$
1620 GOTO 1550:Q$=VISTA
1630 IF Q$="e" THEN GOTO 1750
1640 LET V=1 TO 3: LET V1
1650 GOTO 1540:V=V1
1660 GOTO 1550: NEXT V: GOTO 1560
1670 CL3: GOTO SUB 5050: GOTO SUB 5
1680 GOTO SUB 5500: GOTO 1500
1690 INPUT "Escala de 1 a 8",Q
1700
1705 LET Q=ABS (13/14*(Q-1)+1
1710)
1720 LET I2=I2+Q:Q=LET Q$=P$
1730 GOTO 1500: GOTO 1510
1740 DEF FN X(X)=(X+ECX+INDX)+
1750*(X*MAX)+X+255*(X*MAX)
1760 DEF FN Y(Y)=(Y+ECY+INDY)+
1770*(Y*MAX)+Y+255*(Y*MAX)
1780 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1790 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1800 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1810 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1820 RETURN
1830 LET VISTA=(I2-50000)+(I2-
1840+50000)/(I2-60000)
1850 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1860 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1870 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1880 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1890 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1900 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1910 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1920 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1930 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1940 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1950 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1960 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1970 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1980 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
1990 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2000 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2010 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2020 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2030 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2040 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2050 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2060 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2070 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2080 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2090 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2100 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2110 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2120 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2130 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2140 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2150 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2160 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2170 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2180 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2190 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2200 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2210 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2220 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2230 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2240 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2250 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2260 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2270 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2280 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2290 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2300 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2310 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2320 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2330 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2340 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2350 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2360 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2370 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2380 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2390 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2400 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2410 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2420 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2430 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2440 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2450 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2460 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2470 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2480 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2490 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2500 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2510 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2520 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2530 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2540 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2550 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2560 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2570 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2580 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2590 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2600 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2610 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2620 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2630 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2640 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2650 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2660 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2670 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2680 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2690 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2700 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2710 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2720 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2730 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2740 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2750 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2760 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2770 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2780 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2790 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2800 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2810 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2820 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2830 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2840 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2850 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2860 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2870 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2880 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2890 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2900 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2910 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2920 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2930 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2940 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2950 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2960 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2970 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2980 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
2990 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3000 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3010 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3020 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3030 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3040 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3050 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3060 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3070 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3080 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3090 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3100 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3110 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3120 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3130 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3140 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3150 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3160 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3170 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3180 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3190 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3200 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3210 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3220 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3230 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3240 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3250 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3260 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3270 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3280 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3290 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3300 LET I2=I2+Q:Q=LET I2=I2+Q
3310 LET I2
```

[illegible]

# Profesor particular

Arturo Lobo y J. J. León

## DESPEJAR

Como bien indica su título, el programa de esta semana permite despejar la «x» de cualquier expresión, de cualquier ecuación, que la introduzcáis, siempre y cuando la «x» sólo aparezca una vez en la expresión.

El programa es principalmente de carácter didáctico y está especialmente indicado para aquellos lectores en cursos altos de EGB o en los cursos de BUP y, en general, para los estudiantes que no tienen mucha soltura despejando.

No nos cabe duda que con el programa y un poco de trabajo podrán solucionar todas sus dudas y adquirir mayor destreza en este tema.

Entre las posibilidades del programa cuenta con una que os plantea un problema de des-

pejar la dificultad que elijáis.

Además podéis contar con una serie de ayudas con los paréntesis o con las operaciones y funciones que os indican a cada paso cuáles son las funciones u operaciones que se deben pasar al otro miembro. Aunque lo más indicado es que vayáis siempre un paso por delante del ordenador y confirméis después que lo habéis hecho bien.

Siempre es conveniente ir escribiendo u obteniendo las expresiones sobre el papel pues la anotación de paréntesis de un ordenador no siempre es clara.

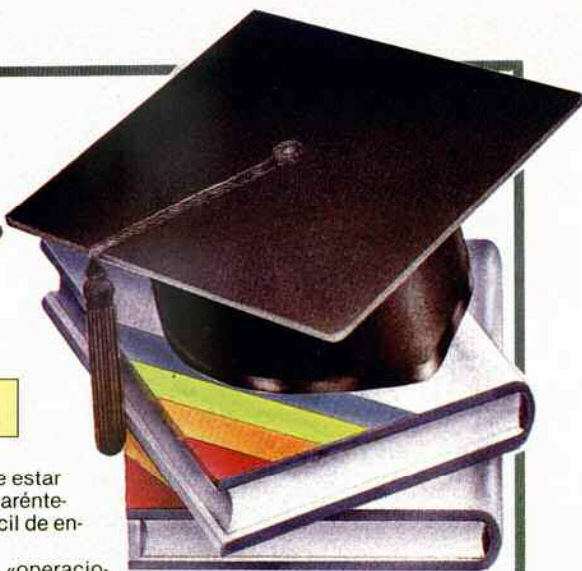
La ayuda de paréntesis lo que hace es imprimir en INVERSE las partes de la expresión que están dentro de paréntesis y como la operación o función

a despejar ha de estar fuera de estos paréntesis, será más fácil de encontrar.

La ayuda de «operaciones» imprime en Flash 1 la operación o función que se debe despejar.

Cuando se introduce una expresión para despejar hay que tener cuidado de no olvidar ningún paréntesis ni el igual o la «x», si no el programa avisará de ello. Como hemos dicho, la «x» sólo puede aparecer una vez en la expresión, si aparece más veces sólo toma como incógnita la primera que encuentra.

Cuando se han solicitado las ayudas, el programa pide permiso; para continuar basta con pulsar una tecla para que lo haga.



Cuando ha llegado al final y tiene despejada la «x», se le puede pedir que obtenga la solución numérica, sin embargo, hay que tener en cuenta varias cosas: puede dar error, si tiene que calcular arcoseno o arcosenos de expresiones mayores que 1.

Además, siempre que aparezca la operación elevar, el programa la despeja poniendo valores absolutos a las expresiones que intervengan ya que en el Spectrum no se puede realizar  $(-2)^{\frac{1}{2}}$  por ejemplo, o sea, que podría llegar a una solución errónea.

```

1999 DEF FN r(x)=ASD+INT (RND*X)
2000 BORDER 6: PAPER 6: INK 0: C
LS0 LET ASD=1: LET IS="X"
2020 INPUT "QUIERES QUE TE PLANT
EE UN EJER- CICIO (S/ENTER) "; L
INE JS
2030 IF JS="" THEN GO SUB 9600:
GO TO 2050
2040 INPUT "QUE EXPRESION QUIERE
S QUE DESPE-JE "; LINE ES
2050 PRINT AT 0,0: BEEP 5,20
PRINT AT 15,0: "AYUDAS " "P- P
aréntesis " "O- operaciones " "N-
ninguna " "A- ambas dos"
2060 LET IS=INKEY$: IF JS="" THEN
EN LET EN1=(JS="P")+ (JS="A"): LE
T EN2=(JS="O")+ (JS="A"): GO TO 2
070
2085 GO TO 2060
2090 CLS: PRINT AT 0,0: ES
2090 GO SUB 9000: PRINT AT 17,0:
" SOLUCION " IS="": BS
2090 INPUT "QUIERES LA SOLUCION
NUMERICA (S/N) "; LINE JS
2100 IF JS="S" THEN BEEP 5,10:
PRINT AT 15,0: IS="VAL BS"
2110 STOP
9000 LET DS=ES: GO SUB 9480: LET
PI=PVAR
9010 FOR I=1 TO LEN ES: IF ES(I)
"=" THEN LET PE=1: GO TO 9020
9015 NEXT I: PRINT "NO HAY "=":
RETURN
9020 IF PE=PI THEN LET BS=ES(PE
+1) TO LEN ES: LET AS=ES(1 TO
PE-1): GO TO 9030
9025 LET BS=ES(1 TO (PE-1)): LET
AS=ES(PE+1) TO LEN ES
9030 LET DS=BS: GO SUB 9480: LET
PI=PVAR
9035 IF AS=IS THEN RETURN
9040 LET CUENTA=0: DIM A(25,2)
DIM B(25): LET AX=1: LET NP=0: L
ET A(1,2)=0: FOR I=1 TO LEN AS:
IF CODE A(I)=40 THEN LET CUENTA
CUENTA+1: LET NP=NP+1: IF NP=1
THEN LET AX=AX+1: LET A(AX,1)=1:
NEXT I
9045 IF CODE AS(I)=41 THEN LET N
P=NP-1: LET CUENTA=CUENTA-1: IF
NP=0 THEN LET A(2,1)=1: NEXT I
9047 NEXT I: IF CUENTA=0 THEN P
RINT "Numero impar de parentesis"
RETURN
9050 LET A(AX+1,1)=LEN AS+1: LET
A(AX+1,2)=LEN AS+1: LET A(1,1)=
0: IF A(2,1)=1 THEN IF A(2,2)=LE
N AS THEN LET AS=AS(2 TO LEN AS
-1): LET PI=PI+1: LET A(AX,2)=0
THEN GO TO 9035
9052 IF (EN1=1)+(AX+1)=1 THEN GO
SUB 9550
9055 LET NO=0: LET NIV=0: LET BI
1)=0: FOR J=1 TO AX: FOR I=A(J,2
)+1 TO A(J+1,1)-1: LET ORDEN=FN
P(CODE AS(I)): IF ORDEN>NIV THEN
LET NIV=ORDEN: LET NO=2: LET B
(2)=1: GO TO 9062
9060 IF ORDEN=NIV THEN IF NIV=0
THEN LET NO=NO+1: LET B(NO)=1
9062 NEXT I: NEXT J: LET B(NO+1)
=LEN AS+1

```

```

9065 IF EN2=1 THEN GO SUB 9560+1
0*(NIV<0)
9070 GO SUB (9100+100*(NIV): BEEP
2,30: PRINT AT 5,0: AS="": BS="
2,30: GO TO 9030
9080 DEF FN P(X)=3*((X+43)+(X+45
1)+2*((X+42)+(X+47)))+(X+94)
9100 IF CODE AS(1)=187 THEN LET
AS=AS(2 TO LEN AS): LET BS="ABS
("BS+"") RETURN
9105 DEF FN I(X)=189+(X+189)+45*
(X+43)+43*(X+45)+178*(X+181)+181
*(X+178)+179*(X+182)+182*(X+179)
+180*(X+183)+183*(X+180)+184*(X
+185)+185*(X+184)+42*(X+47)+47*(X
+42)
9110 LET BS=CHR$(FN I(CODE AS(1)
)+("BS+"")): LET AS=AS(2 TO LEN
AS)
9115 IF FN I(CODE AS(1))=0 THEN
IF EN2=1 THEN GO SUB 9560
9120 IF FN I(CODE AS(1))=0 THEN
LET BS=CHR$(FN I(CODE AS(1))+BS
LET AS=AS(2 TO LEN AS): GO TO 9
115
9125 RETURN
9200 FOR I=1 TO NO: IF B(I)<PI T
HEN LET POSX=I
9205 NEXT I
9210 IF POSX=1 THEN LET CS=AS(B(
2)+1 TO B(3)-1): FOR I=3 TO NO:
LET CS=CS+" "+AS(B(I)+1 TO B(I+
1)-1): NEXT I: LET BS="ABS ("BS+
")+(1/("CS+""))": LET AS=AS(1 TO
B(2)-1): RETURN
9220 LET CS="ABS "+AS(1 TO B(2)-
1): FOR I=2 TO NO: IF I<POSX TH
EN LET CS=CS+" "+AS(B(I)+1 TO B(
I+1)-1): LET BS="LN ABS ("BS
+"")/LN ABS ("CS+""))": LET AS=AS
(B(POSX)+1 TO B(POSX+1)-1): RETU
RN
9300 GO TO 9400
9400 LET BS="("BS+"")": IF B(2)>
1 THEN LET AS=CHR$(42+(NIV=3))+
AS: FOR I=1 TO NO+1: LET B(I)=B(
I)+1: NEXT I: LET PI=PI+1: GO TO
9410
9410 FOR I=1 TO NO: LET B(I)=B(
I)+1: NEXT I: LET NO=NO+1
9415 NEXT I
9420 IF AS(B(POSX))=CHR$(42+(NIV
=3)): THEN GO TO 9440
9425 LET CS="": FOR I=1 TO NO: I
F I<POSX THEN LET CS=CS+AS(B(I)
+1 TO B(I+1)-1): RETURN
9430 NEXT I: LET CS=CS(2 TO LEN
CS): LET BS=CS+CHR$(45+2*(NIV=2
))+BS: LET AS=AS(B(POSX)+1 TO B(
POSX+1)-1): RETURN
9440 FOR I=1 TO NO: IF I<POSX T
HEN LET BS=BS+CHR$(FN I(CODE AS(
B(I)+1))+AS(B(I)+1 TO B(I+1)-1)
9445 NEXT I: LET AS=AS(B(POSX)+1
TO B(POSX+1)-1): RETURN
9450 IF DS="" THEN LET PVAR=0: R
ETURN
9490 LET PVAR=0: LET FIN=LEN DS:
LEN IS+1: FOR P=1 TO FIN: IF DS(

```

```

P TO (P-1+LEN IS))=IS THEN IF ((
FN I(CODE DS(P-1+(P=1)))=0)+(P=
1)+((FN I(CODE DS(P+LEN IS-(P=
1)))=0)+(P=FIN))=1 THEN LET PV
AR=P: RETURN
9492 NEXT P: RETURN
9498 DEF FN I(X)=189+(X+189)+45*
(X+43)+43*(X+45)+178*(X+181)+181
*(X+178)+179*(X+182)+182*(X+179)
+180*(X+183)+183*(X+180)+184*(X
+185)+185*(X+184)+42*(X+47)+47*(X
+42)
9550 BEEP 5,50: PRINT AT 10,0:
FOR K=1 TO AX: PRINT AS(A(K,2)+1
TO A(K+1,1)-1): IF K<AX THEN
PRINT INVERSE 1: AS(A(K+1,1) TO A
(K+1,2)): NEXT K
9555 GO TO 9590
9560 BEEP 4,20: GO SUB 9580: PR
INT AT 10,0: FLASH 1,AS(1): FLAS
H 0,AS(2 TO LEN AS)
9565 GO TO 9590
9570 BEEP 3,0: GO SUB 9580: PRI
NT AT 10,0: FOR I=1 TO NO: PRINT
AS(B(I)+1 TO B(I+1)-1): IF I<
NO THEN PRINT FLASH 1,AS(B(I+1)
TO B(I+2)): NEXT I
9575 GO TO 9590
9580 PRINT AT 10,0: FOR G=1 TO
4+32: PRINT " ": NEXT G: RETURN
9590 PRINT "="BS: BEEP 2,20: B
EEP 1,0: PRINT AT 20,20: "CONTIN
UO"
9592 IF INKEY$="" THEN PRINT AT
20,20: "
9594 GO TO 9592
9600 LET YAI=0: LET PAR=0: LET Y
AX=0: LET Y=0
9605 INPUT "DIFICULTAD de 1 a 10
"; LDI
9610 LET LDI=3+LDI: GO TO 9670
9640 IF (FN r(12))+3+2*(LDI/LEN r
$)+(PAR*(LDI/3))+30*(YAX)=1 THE
N LET Y=5+X: GO TO 9642
9642 LET Y=5+X: GO TO 9642
9643 LET Y=FN r(10): IF (PAR=0)
+(Y<3+2*(LDI/LEN r$)) THEN GO TO
9650
9644 GO TO 9660+20*(PAR=0)+YAX*(
LDI/LEN r$(Y<3+2*(LDI/LEN r$))
9650 LET PAR=PAR+1: LET Y=5+X:
LET YAX=FN r(10)
9652 IF PAR=0 THEN GO TO 9660+20
+YAX*(2+FN r(LDI/LEN r$))+3
9654 GO TO 9660-10*(FN r(LDI/LE
N r$))+2
9660 LET Y=FN r(5): LET Y=42+(
Y<1)+43*(Y=2)+45*(Y=3)+47*(Y
=4)+94*(Y=5): LET Y=5+X: GO TO
9662
9662 GO TO 9670-30*(FN r(10+LDI
/LEN r$))+3
9670 IF FN r(12))+3+3*(PAR+YAX*(
LDI/LEN r$(Y<3+2*(LDI/LEN r$))
GO TO 9672
9671 LET Y=5+X: GO TO 9672
9672 IF FN r(20))+6+(3-YAX+PAR)*(
LDI/LEN r$(Y<3+1.5*LEN r$)) THEN GO TO
9680
9680 GO TO 9670
9682 IF YAI=0 THEN LET YAI=1: LE
T Y=5+X: GO TO 9670
9685 LET Y=5: RETURN

```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## SISTEMAS ELEMENTALES

El programa de esta semana va dirigido a los estudiantes de octavo curso de EGB, y pretende ser una ayuda en vuestro primer contacto con la resolución de sistemas lineales de 2 incógnitas.

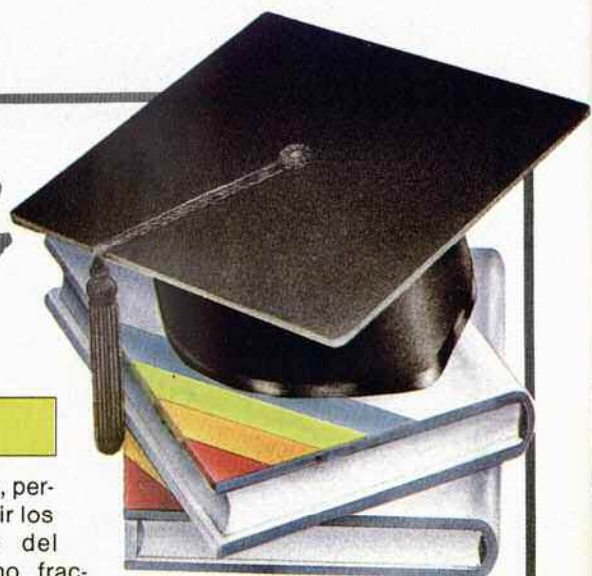
Como ya sabréis, existen tres métodos fundamentales de resolución exacta: reducción, sustitución e igualación, además del método

gráfico (asimilando ambas ecuaciones a rectas y representando su punto de corte). Con este programa podéis introducir el sistema y él os irá guiando, por el sistema que escojáis, hasta llegar a la solución.

Este programa tiene la particularidad de que maneja fracciones además de números enteros, con lo que resulta mucho más didáctico.

Asimismo, permite introducir los coeficientes del sistema como fracciones: para ello debéis introducir «f», ENTER, numerador (con el signo), ENTER, denominador y ENTER, pero conviene señalar que, en todo caso, el sistema debe ser compatible y determinado puesto que, por no alargar el programa, no realiza

esa comprobación por sí mismo. Para terminar una advertencia: las líneas DATA del final son una rutina máquina y no podéis cometer ninguna equivocación al teclearlas. Por si acaso, os recomendamos grabar el programa antes de hacerlo correr.



```

2 CLEAR 64999: GO SUB 8000: R
ESTORE DIM a(2)
3 PAPER 6 BORDER 6: CLS
110 CLS PRINT AT 3,12:"MENU":
AT 6,4:
120 RESTORE 150: FOR i=1 TO 4
130 READ a$: PRINT a$: TAB 4:
BEPP 1:1 NEXT
150 DATA 1)INTRODUCIR ECUACION
2)MÉTODO DE SUSTITUCIÓN 3)
MÉTODO DE REDUCCIÓN 4)MÉTODO
DE IGUALACIÓN
160 LET a$=INKEY$
170 IF CODE a$>49 AND CODE a$<
52 THEN LET menu=VAL a$: GO TO
1000 menu
180 GO TO 160
210 FOR i=0 TO 1: LET f1=0: GO
SUB 215: PRINT "": NEXT i: RET
URN
215 LET j=1
220 LET a(1)=z(3+i+j,1)
230 LET a(2)=z(3+i+j,2)
240 LET a=a(1)/a(2): IF NOT a T
HEN GO TO 290
250 IF j=1 THEN PRINT "": PRI
NT (CHR$(8) AND a(2)): PRI
NT (CHR$(8) AND a(1)):
260 GO SUB 7000: PRINT (CHR$(8)
AND ABS a(1)):
270 PRINT CHR$(119+j): GO SUB
350
290 IF j=1 THEN LET j=2: GO TO
220
300 PRINT "": LET a(1)=z(3+i
+1,1): LET a(2)=z(3+i+1,2)
310 GO SUB 7000: RETURN
350 IF f1 THEN IF j=1 THEN PRI
NT CHR$(8) ("": GO SUB 600: PRI
NT "":
360 RETURN
410 LET a(1)=ABS a(1) AND ABS a(
1):=ABS a(2)+ABS a(2) AND ABS
a(2):ABS a(1)
420 LET a2=ABS a(1)+ABS a(2)-a1
430 IF NOT a2 THEN RETURN
440 LET r=a2-2*INT(a2/2)
450 IF r=0 THEN LET a(1)=a(1)/
a2: LET a(2)=a(2)/a2: RETURN
460 LET a1=a2: LET a2=r: GO TO
430
500 PRINT #0: AT 1,8: "pulsar una
tecla PAUSE 0 PRINT #0: AT 1,8
: TAB 24: RETURN
600 LET a(1)=z(3+i+3,1):z(3+i+
3,2)
610 LET a(2)=z(3+i+3,2):z(3+i+
3,1)
620 IF a(1) THEN GO SUB 400: GO
SUB 7000: PRINT "": LET f1=1
630 IF NOT z(3+i+3,1) THEN
PRINT CHR$(8) ("": GO TO direcc
i
640 LET a(1)=-z(3+i+3-j,1):z(
3+i+j,2)
650 LET a(2)=z(3+i+3-j,2):z(3
+i+j,1)
660 IF a(1)=0 AND f1 THEN PRIN
T CHR$(8)
670 GO SUB 400: GO SUB 7000: PR
INT (CHR$(8) AND ABS a(1)+a(2)
)=1, CHR$(122-j)):
680 RETURN
800 FOR j=1 TO 6: FOR j=1 TO 2:
LET a(j)=z(1,j): NEXT j: GO SUB
400: LET a(2)=a(2) OR NOT a(1):
FOR j=1 TO 2: LET z(1,j)=a(j):
NEXT j: NEXT j: RETURN
1010 CLS: PRINT AT 0,0: "ax+by=c
dx+ey=f
1020 PRINT AT 6,0: "Introduce los
valores de a,b,c, d,e y f. Si
alguno es fraccionario intro-
duce antes la fra
1030 DIM z(6,2): FOR i=1 TO 6
1040 INPUT CHR$(96+i): "": LIN
E a$
1050 IF a$(0) THEN LET z(1,1)=

```

```

VAL a$: LET z(1,2)=1: GO TO 1070
1060 INPUT CHR$(96+i): "": z(1,
1)=z(1,2)
1070 NEXT i: CLS: PRINT "": GO
SUB 200
1080 GO SUB 500: CLS
1090 RESTORE 1150: DIM x(3,2)
1100 FOR m=1 TO 3: READ P, Q, r, s
1110 LET a(1)=z(P,1)+z(Q,1)+z(r,
2)+z(s,2)-z(r,1)+z(s,1)+z(P,2)+z
(Q,2)
1120 LET a(2)=z(P,2)+z(Q,2)+z(r,
2)+z(s,2)
1130 GO SUB 400: LET x(m,1)=a(1)
1140 DIM y(2,2): FOR m=1 TO 2: L
ET a(1)=x(m+1,1)+x(1,2): LET a(2)
=x(m+1,2)+x(1,1): GO SUB 400: L
ET y(m,1)=a(1): LET y(m,2)=a(2):
NEXT m
1150 DATA 1,5,4,2,3,5,2,6,1,6,3,
1160 GO TO 100
2000 LET direccion=2150
2010 CLS: PRINT "": GO SUB 200
2020 FOR i=0 TO 1: FOR j=1 TO 2
2030 IF z(i+j,1)=0 THEN LET j=
3: GO TO 2030
2040 NEXT j: NEXT i
2050 FOR i=0 TO 1: FOR j=1 TO 2
2060 IF z(i+j,1)/z(i+j,2)=1
THEN GO TO 2090
2070 NEXT j: NEXT i
2080 LET i=INT(RND*2): LET j=IN
T(RND*2)+1
2090 LET i=1: LET j=1
2100 PRINT AT 8,0: "De la ecuacio
n n.º "+1: " tenemos "
2110 PRINT AT 10,10: CHR$(119+j)
j="
2120 GO SUB 600: GO SUB 500
2125 IF m=2 THEN RETURN
2130 PRINT AT 12,0: "Sustituyendo
en la ecuación "+1: " LET
f1=1: LET i=NOT i:
2140 PRINT AT 14,10: GO SUB 215
GO SUB 500
2150 PRINT AT 17,0: "operando "
2160 GO TO 6500
3000 CLS PRINT "": GO SUB 200: L
ET direccion=a$
3010 DIM w(2,2): LET j=1+z(1,1)
1=0 OR z(4,1)=0+ABS(z(2,1)/z(
2,2)+z(5,2)/z(5,1))=1
3015 DIM v(6,2): FOR i=1 TO 6: F
OR j=1 TO 2: LET v(i,j)=z(1,j)
NEXT j: NEXT i
3020 FOR i=0 TO 1: LET a(1)=z(
j+j+3,1)/z(j+j+3,2): NEXT i
3030 GO SUB 400: FOR i=1 TO 2: F
OR j=1 TO 2
3040 LET w(i,j)=z(j+j+3+i-1,j):
IF i=1 AND j=1 THEN LET w(i,j)=
v(i,j)
3050 NEXT j: NEXT i
3060 IF a2=INT a2 THEN FOR i=1 T
O 2: LET w(i,2)=w(i,2)+a2: NEXT
i
3070 PRINT AT 6,0: "Multiplicando
la ecuación 1 por " LET i=a2
3080 GO SUB 3500: PRINT " y la 2
por " LET i=a1: GO SUB 3500:
PRINT " queda
3090 FOR i=1 TO 2: FOR s=1 TO 2:
FOR t=1 TO 3: LET z(t+i+3 AND s=
1)=z(t+i+3 AND s)+i*w(s,r):
NEXT t: NEXT s: NEXT r: GO SUB
800: GO SUB 200
3090 GO SUB 500: PRINT AT 13,18:
"sumando
3100 LET a(1)=z(3,1)+z(5,2)+z(3,
2)+z(6,1) LET a(2)=z(3,2)+z(6,2)
GO SUB 400: DIM u(2)
3110 FOR s=1 TO 2: LET u(s)=a(s)
LET a(s)=a(s)+y(3-j,j,3-s) NEX
T s
3120 PRINT AT 15,18: GO SUB 400

```

```

GO SUB 7000: PRINT CHR$(122-j
j): " LET a(1)=u(1): LET a(2)
=u(2)
3130 GO SUB 500: LET i=0: FOR i
=1 TO 6: FOR j=1 TO 2: LET z(i,j)
=v(i,j): NEXT j: NEXT i: GO TO
4050
3500 LET a(1)=w(i,1): LET a(2)=
w(i,2): GO SUB 400: GO SUB 7000
RETURN
4000 LET direccion=4050
4010 GO SUB 2010
4020 PRINT AT 12,0: "y de la ecua
ción "+1: " LET i=NOT i
4030 PRINT AT 14,10: CHR$(119+j)
j="
4040 LET i=NOT i: PRINT AT 16,
0: "Igualando " GO SUB 600: PR
INT "": LET i=NOT i: GO SUB
600: GO SUB 500
4050 PRINT AT 18,0: "De donde "
4060 GO TO 6500
6500 PRINT CHR$(122-j): "": L
ET a(1)=y(3-j,j,1): LET a(2)=y(3-
j,j,2): GO SUB 7000
6510 PRINT "sustituyendo en ec
uación "+1: " CHR$(119+j): "
6520 LET a(1)=y(j,j,1): LET a(2)=
y(j,j,2): GO SUB 7000: GO SUB 500
GO TO 100
7000 IF a(2)=1 THEN PRINT a(1)
1=SGN a(2): GO TO 7130
7005 PRINT ("") AND a(1)+a(2)
0: LET a(1)=ABS a(1): LET a(2)
=ABS a(2)
7010 LET a1=LEN STR$(a(1)): LET a
2=LEN STR$(a(2))
7020 LET i=a1+(a2-a1)*(a2+a1)
7030 DIM c$(i): DIM b$(i)
7040 LET c$(i)=a1+1 TO i: STR$
=a(1): LET b$(i)=a2+1 TO i: STR$
=a(2)
7050 LET p2=-21+8*PEEK 23689
7060 FOR i=0 TO i-1
7070 LET p1=(33-PEEK 23688)+8+1+
8*i
7080 PLOT p1,p2: DRAW 6,0
7090 IF a2=LEN-1 THEN LET a3=VR
L b$(i+1): RANDOMIZE FN p(p1+1-3
+(i=LEN-2),p2-7,a3)
7100 IF a1=LEN-1 THEN LET a4=VR
L c$(i+1): RANDOMIZE FN p(p1+1-3
+(i=LEN-2),p2+1,a4)
7110 NEXT i
7120 FOR i=1 TO INT((1-6*LEN)/
8)+1: PRINT OVER 1, "": NEXT i
7130 RETURN
8000 RESTORE 8050
8010 FOR i=65000 TO 65077: READ
a: POKE i,a: NEXT i
8020 FOR i=65480 TO 65431: STEP 4
: FOR j=0 TO 2: READ a: POKE i+j
: NEXT j: POKE i+3,0: NEXT i
8050 DATA 205,148,30,245,205,153
30,197,205,153,30,197,225,205,1
23,198,5,95,241,229,38,255,203
8060 DATA 39,203,39,198,200,111,
78,44,85,44,78,125,95,121,205,12
0,255,205,120,255,125,205,120
8070 DATA 255,205,120,255,124,20
5,120,255,125,198,5,6,79,205,4
3,125,224,104,233,96,241,35,64,10
05,43,45,195,201
8080 DATA 6,4,197,203,127,40,11,
67,77,245,213,229,205,223,34,225
299,241,44,203,7,199,15,234,79,
125,214,4,111,121,29,201
8090 DATA 105,153,96,35,34,32,10
5,36,240,105,41,96,38,111,32,240
125,224,104,233,96,241,35,64,10
5,105,96,105,113,96,0,0,32,0,112
0
8100 DEF FN p(x,y,n)=x+y*INTUSR 6
8000
8110 RETURN

```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## DERIVADAS 1

Esta semana publicamos la primera parte del programa «Derivadas» que por su extensión no os podemos ofrecer en un solo número.

«Derivadas» es capaz de obtener la derivada de cualquier función escrita utilizando las operaciones matemáticas del Spectrum.

Principalmente está enfocado a la enseñanza y no para solucionar los deberes de casa. Tiene varios niveles según el grado de conocimiento de cada usuario. En el nivel más básico calcula la derivada de una función paso a paso, muestra en la pantalla la operación o función que va a derivar y os pide permiso para continuar.

Además de obtener derivadas puede plantearos un problema, de dificultad a elegir, o comprobar la solución que hayáis obtenido vosotros, o hallar la derivada en un punto.

Otra aplicación muy importante que puede realizar es ob-

tener la ecuación de la recta tangente en un punto a la función que le deis, tanto si está en explícitas ( $y = f(x)$ ) o en implícitas ( $f(x,y) = 0$ ).

Cuando el programa os pida la función para obtener la recta, tangente, derivar, etc., basta con dar ENTER si la función ya está dentro (por ejemplo si es la que os ha planteado como problema).

La notación que utiliza así como el método de derivar es algo particular, lo cual será una ventaja si tenéis problemas con otros métodos.

Para denotar la derivada pone una interrogación delante de lo que falta por derivar. Así, lo que hay escrito en un papel es  $d/dx$  (función), es en la pantalla? (función).

El método de derivación está pensado para ser didáctico, deriva de varias pasadas por la expresión y muy ordenadamente, derivando sólo una cosa cada vez, lo cual es muy eficaz pa-

ra aprender la regla de la cadena. Así, la expresión  $\ln(x^2 + \cos x)$  haría:

- 1.ª pasada:  $\cos \ln(x^2 + \cos x)^?$  ( $\ln(x^2 + \cos x)$ )
- 2.ª pasada:  $\cos \ln(x^2 + \cos x)^? * 1/(x^2 + \cos x)^?$  ( $x^2 + \cos x$ )
- 3.ª pasada:  $\cos \ln(x^2 + \cos x)^? * 1/(x^2 + \cos x)^? * (2x)^?$  ( $2x$ )
- 4.ª pasada:  $\cos \ln(x^2 + \cos x)^? * 1/(x^2 + \cos x)^? * (2x)^? * (2-1) + (-\sin x)$

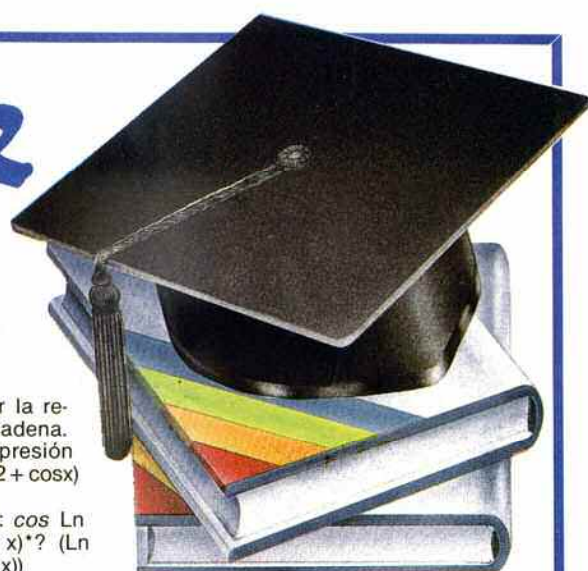
Tenemos que advertir que el programa no corre si está en mayúsculas. También que debido a que el Spectrum no realiza operaciones como  $(-2)^2$  cuando aparezca la función «elevator» el programa puede dar error si queremos calcular la derivada en un punto o comprobar vuestra solución.

Para derivar una función de  $x$  elevada a otra utiliza la fórmu-

la que se obtiene derivando por el método logarítmico.

Los productos los deriva todos a la vez y las divisiones también, por ejemplo:  $?(f(x)*g(x)*h(x)) = ?(f(x))*g(x)*h(x) + f(x)*?(g(x))*h(x) + f(x)*g(x)*?(h(x))$  y esta fórmula es generalizable a cualquier número de factores. En cuanto a las divisiones, las opera como si fuera el producto por el inverso, o sea,  $?(f(x)/g(x)) = ?(f(x))*(1/g(x))$ .

Si tenéis alguna duda podéis consultar con vuestro profesor, no obstante, la próxima semana os ofreceremos junto con la segunda parte del programa una guía de cómo aprender a derivar.



```

1997 DEF FN f(x)=VAL f$
1998 DEF FN d(x)=VAL d$
1999 DEF FN f(x)=VAL f$+INT (RND*1)
2000 BORDER 5: PAPER 5: INK 0: C
LS
LET d$=1: LET f$="x"
2005 LET ense=0
2010 GO TO 3000
2020 GO SUB 2000: LET g$=f$
2023 PRINT AT 0,0: "Tienes que de
rivar la siguiente función:"
2025 PRINT AT 4,0: f$: GO TO 9750
2030 INPUT "Que función quieres
derivar?": f(x): LINE US
2032 IF US(1) THEN LET g$=f$
2035 LET ense=0: GO TO 3000
2040 PAUSE 10: PRINT AT 15,0: "Ni
veles": "0- Sin ayuda": "1- Alto":
"2- Medio": "3- Básico":
2045 LET ense=INKEY$: IF ense="0" THEN
N GO TO 2045
2046 LET ense=(ense="1")+2*(ense="2")
+3*(ense="3")
2048 PRINT AT 21,0: "OK": PAUSE 1
0: RETURN
2050 INPUT "En que punto quieres
la derivada?": x0: "x0"
2055 PRINT AT 15,0: "Su valor es
": FN d(x0): GO TO 9750
2060 INPUT "Dime tu derivada": L
INE f$
2065 LET t=1: 234567: FOR t=1 T
O 5: GO TO 2067: (ABS (FN f(ertt)
)-FN d(ertt)) / (te-6)
2067 BEEP 1,0: PRINT AT 15,0: "Lo
siento, es incorrecta": GO TO 9
750
2068 NEXT t: PRINT AT 15,0: "En e
fecto, está bien": BEEP 1,5: BEE
P 2,20: GO TO 9750
2070 PRINT AT 17,0: "La función e
sta en explícitas (e)": "y=f(x)"
o bien en implícitas (i)": f(x,y)=0"
2075 DIM x(2)
2080 INPUT "e/i": LINE J$: L
ET tota=10*(J$="i")
2083 DATA "f(x,y)=0": "y=f(x)"
2084 DATA "f(x,y)=0": "f(x,y)=0"
2085 CLS: RESTORE 2083: J$="i"
2086 READ US: INPUT (US) LINE US
2090 IF US(1) THEN LET g$=f$
2093 LET ense=0
2095 INPUT "Dime el punto (a,b)
de la curva": "a": "b": "a": "b":
LINE US
2100 IF US(1) THEN LET b1=VAL
US(1): GO TO 2105
2103 LET x=a:1: LET b1=VAL g$
2105 PRINT AT 2,0: "La ecuación g
eneral de la recta": "tangente en
el punto (a,b) a la a": "a": "b":
2110 PRINT "función": "a": "b": "a": "b":
PRINT US: "e": GO TO 2120+J$
2120 PRINT AT 9,8: "y-b = (f'(x)) *
(x-a)": GO TO 2140

```

```

2130 PRINT AT 8,11: "y-b": AT 8,20
"x-a"
2132 PRINT AT 10,11: "f'(x)": AT 10,
20: "f'(x)"
2135 PRINT AT 9,16: "e": "e": PLOT 8
7,100: DRAW 25,0: PLOT 150,100:
DRAW 24,0
2140 LET imp=0: PRINT AT 15,0: "P
rimero derivo la función y
después hallo su valor en
el punto": GO SUB 9750: GO TO 216
0+J$
2150 BEEP 1,40: PRINT AT 20,0: "
Derivada respecto a": CHR$(120)+
imp: FOR p=1 TO 200: NEXT p
2155 LET ense=0: LET i$=CHR$(120
+imp): GO TO 3000
2160 GO SUB 2150: CLS: LET x=a:
1: LET y=b: VAL g$ GO SUB 2500
2165 BEEP 3,5: BEEP 2,30: PRIN
T AT 10,0: "La recta es, operando
": "y=": f(x): "x": CHR$(143)+2*
(b1-f(x0))/(a1-x0): "ABS (b1-f(x
0))/(a1-x0)
2170 GO TO 9750
2200 FOR f=0 TO 1: LET imp=f: GO
SUB 2150: CLS: LET x=a:1: LET
y=b:1: LET x1=f+1: VAL g$: GO SUB
2500: NEXT f
2205 LET i$="x"
2210 CLS: BEEP 3,5: BEEP 2,30
PRINT AT 10,0: "La recta es, op
erando": "y=": "x(1)*x(2)": "x":
LET i$=CHR$(143)+2*(b1-f(x0))/(a1-x0): "ABS
(b1-f(x0))/(a1-x0)
2250 PRINT AT 5,0: "Esta derivada
vale en el punto (a,b)": "f":
CHR$(120+imp): "e": "e": VAL g$: GO T
O 9750
2290 DATA "MENU GENERAL": "1- PLA
NTEAR UN PROBLEMA":
2292 DATA "2- OBTENER LA DERIVAD
A": "3- APROXIMAR":
2294 DATA "4- DERIVADA EN UN PUN
TO": "5- COMPROBAR TU SOLUCION":
2296 DATA "6- RECTA TANGENTE EN
UN PUNTO":
3000 CLS: RESTORE 2290: FOR t=1
TO 7: READ t: PRINT AT 21+2,t
2,5: BEEP 2,30
3005 LET i$="x"
3010 NEXT t
3015 LET ax=CODE INKEY$: IF ax=
54 OR ax=49 THEN GO TO 3020
3030 CLS: GO SUB 2010+10*(ax=4
9)
3040 BEEP 1,3: BEEP 1,5: BEEP
1,20: PRINT AT 0,0: "Función": "e
": "e": "e": "e": "e": "e": "e": "e":
3050 DEF FN f(x)=x*(x+64)+(x+91
)+(x+95)+(x+123)+(x+47)+(x+58)
3061 DEF FN p(x)=3*(x+43)+(x+45
)+(x+42)+(x+42)+(x+47)+(x+94)
3063 CLS: BEEP 1,5: PRINT AT 0
,0: "Función": "e":

```

```

8005 LET d$=f$: GO SUB 8480: IF
pvar=0 THEN LET ense="0": RETURN
8007 LET ense=0: LET paren=0: GO
SUB 8040: LET ense=0
8008 GO SUB 9690
8010 LET b$="": FOR o=1 TO LEN e
$
8012 IF CODE e$(o) < 0 THEN LET b
$=b$+e$(o): NEXT o: GO TO 8024
8014 LET np=0: FOR i=0+1 TO LEN
e$: IF CODE e$(i) < 0 THEN LET np
=np+1
8016 IF CODE e$(i) < 41 THEN LET n
p=np+1: IF np=0 THEN GO TO 8020
8018 NEXT i: PRINT FLASH 1: "Nume
ro impar de parentesis": STOP
8020 LET nuevao=1: GO SUB 9700
LET a$=e$(0+2 TO 1-1): LET par
en=0: GO SUB 8040
8021 GO SUB 9690: IF a$="1" AND
b$="" THEN IF b$(LEN b$)="" TH
EN LET b$=b$+1 TO LEN b$-1: GO
TO 8023
8022 LET b$=b$+a$
8023 LET onuevao: IF o<LEN e$
THEN GO TO 8012
8024 IF b$=e$ THEN CLS: GO SUB
7500: RETURN
8025 IF ense=1 THEN GO SUB 9780
8026 LET ense=0: GO TO 8010
8039 LET paren=1
8040 DIM a(25,2): DIM b(25): LET
ax=1: LET np=0: LET a(1,2)=0: F
OR i=1 TO LEN a$: IF CODE a$(i) <
40 THEN LET np=np+1: IF np=1 TH
EN LET ax=ax+1: LET a(ax,1)=1: NE
XT i
8045 IF CODE a$(1) < 41 THEN LET n
p=np+1: IF np=0 THEN LET a(ax,2)
=1: NEXT i
8047 NEXT i: IF np=0 THEN PRINT
"numero impar de parentesis !!!"
8050 LET a(ax+1,1)=LEN a$+1: IF
a(2,1)=1 THEN IF a(2,2)=LEN a$ T
HEN LET a$=a$(2 TO (LEN a$-1)):
GO TO 8039
8055 LET no=0: LET niv=0: LET b(
1)=0: FOR j=1 TO ax: FOR i=a(j,2)
+1 TO a(j+1,1)-1: LET ord=FN
P(CODE a$(i)): IF ord=niv THEN
LET niv=ord: LET no=2: LET b(
2)=1: GO TO 8062
8060 IF ord=niv THEN IF niv>0
THEN LET no=no+1: LET b(nv)=1
8062 NEXT i: NEXT j: LET b(nv+1)
=LEN a$+1
8065 IF ense=2 THEN GO SUB 9570-
10*(niv=0)
8070 GO SUB (8100+100*(niv)): RETU
RN
8100 IF a$=i$ THEN LET a$="1": R
TURN
8101 IF a$="ABS" THEN LET a$
="SGN" +i$: RETURN

```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J.J. LEON

## DERIVADAS 2

Ya tenéis aquí la segunda parte del programa de derivadas, que como sabéis, tiene que unirse a la primera para funcionar correctamente. Y, como os prometimos, os vamos a dar unas pequeñas normas que podéis seguir aquellos que tengáis dificultad especial para derivar. Creemos que con el programa y este resumen podréis conseguir hallar cualquier función derivada, aunque debéis pensar también que la facilidad sólo puede obtenerse con la práctica.

Y aquí vienen esas 10 «lecciones»:

1. La derivada de una constante es cero.
2. La derivada de  $x$  es 1.
3. La derivada de  $ax^b$  es  $abx^{(b-1)}$ .
4. La derivada de una suma es la suma de las derivadas.
5. La derivada de un producto  $uv$  es la derivada de  $u$  por  $v$  más la derivada de  $v$  por  $u$ .
6. La derivada de un cociente  $u/v$  es la derivada de  $u$  por  $v$  menos la derivada de  $v$  por  $u$  y todo dividido por  $u^2$ .
7. Debéis recordar de memoria la derivada de una serie de funciones elementales:  $\text{sen } x$ ,  $\text{cos } x$ ,

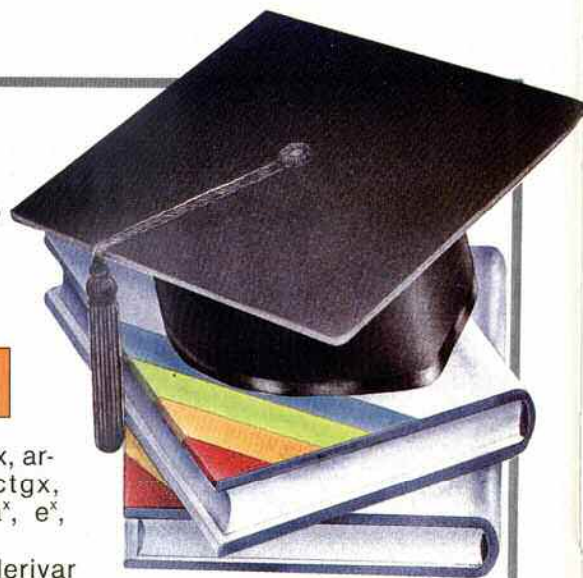
tagx, arcsenx, arccosx, arctgx, logx, Lnx,  $a^x$ ,  $e^x$ ,  $\sqrt{x}$

8. Para derivar  $\sqrt{x}$ , considerarlo como  $x^{1/2}$  y operar igual que en 3.

9. Regla de la cadena: si queréis derivar algo que no aparezca explícitamente en los puntos anteriores, derivar la expresión más «exterior» y a continuación, poner un signo por, abrir un paréntesis y proseguir derivando la expresión que queda como si la más exterior ya no estuviera (el programa lo muestra más claramente).

10. Derivar una función elevada a otra se hace derivando primero como potencia, luego como exponencial y sumando ambos resultados.

Os aseguramos que si hacéis los ejercicios de derivadas delante de vuestro Spectrum no sólo os resultará más entretenido sino que el aprendizaje visual podrá ahorrarnos muchas horas de trabajo.

[illegible]

```

8330 LET d$=""
8340 FOR i=1 TO n: LET d$=a$(b(i)+1)+TO b(i+1)-1): GO SUB 8480
IF pvar=0 THEN NEXT i: GO TO 8350
8350 LET d$=""
FOR i=1 TO n: LET d$=a$(b(i)+1)+TO b(i+1)-1): NEXT i: GO TO 8340
8360 IF a$(b(i)+1)=1 THEN, THEN, LET s9=45: LET d$=d$+a$(b(i)+1)+TO b(i+1)-1)+CHR$(0)+"": a$(b(i)+1)=1: NEXT i: GO TO 8440
8370 LET s9=43: LET d$=d$+a$(b(i)+1)+TO b(i+1)-1)+CHR$(0)+"": a$(b(i)+1)=1: NEXT i: GO TO 8440
8380 LET c$(s)=CHR$(s9+d$): NEXT i
8390 IF (c$(1 TO 2)="++")+ (c$(3 TO 4)="*") THEN LET c$=c$(3 TO 4) LEN c$
8400 IF c$(1)="+" THEN LET c$=c$(2 TO 4) LEN c$
8410 IF paren=1 THEN LET a$=""
8420 RETURN
8430 LET s9=45: RETURN
8440 LET d$=a$(b(i)+1)+TO b(i+1)-1): GO SUB 8480
IF pvar=0 THEN LET c$=c$+a$(b(i)+1)+CHR$(0)+"": d$=""
8450 NEXT i
IF paren=1 THEN LET c$=c$+CHR$(1)+TO b(i+1)-1)+CHR$(0)+"": RETURN
8460 LET s9=c$: RETURN
8470 IF d$="" THEN LET pvar=0: RETURN
8480 LET pvar=0: LET fin=pvar: d$=LEN i+1: FOR p=1 TO fin: IF d$(p TO i+1) LEN i$)=1 THEN IF (FN (CODE$(d$(p-1+(p+1)))=0) THEN p=p+1: GOTO 8480
IF (CODE$(d$(p+1))=1) THEN LET pv a$=p: RETURN
8490 NEXT p: RETURN
8500 BEB .5: PRINT AT 10.0
FOR i=1 TO 10: PRINT a$(i)+1 TO a$(i+1)-1): IF i%4 THEN PRINT INVERSE 1:a$(a(i+1)+1 TO a$(i+2)): NEXT i
8510 LET i=10: PRINT AT 13.0: FLASH 1:a$(1 TO 10): FLASH 0:a$(2 TO 4)
8520 GO TO 8598
8530 FOR k=1 TO 10: PRINT AT 13.0: FOR k=1 TO 10: PRINT a$(b(k)+1 TO b(k+1)-1): IF k%10 THEN PRINT FLASH 1:a$(b(k)+1 TO 10)
8540 GO TO 8598

```

```

9580 PRINT AT 10.0, "FOR g=1 TO 4:32: PRINT "NEXT g: RETURN
9595 BEP 1.20 BEP 1.0: PRINT
9610 AT 21.15: "Continuar"
9592 LET  $\$$ =INKEY$ IF  $\$$ <" " THEN
EN PRINT AT 21.0, " " RETURN
9594 GO TO 9592
9600 LET  $\text{val}=0$  LET  $\text{par}=0$  LET  $\text{y}$ 
 $\text{ax}=0$  LET  $\text{rs}=""$ 
9605 INPUT "DIFICULTAD de 1 a 10:
31
9610 LET  $\text{fn}=(1.5+\text{di})$  GO TO 967
9640 IF  $\text{fn} \neq \text{f} (2) 1.5+\text{ax}+(\text{di}/3)$ 
THEN LET  $\text{rs}="*"+\text{x}$  LET  $\text{yax}1: \text{G}$ 
O TO 9642
9641 LET  $\text{rs}=\text{rs}+\text{CHR} (49+\text{FN} (8))$ 
9642 LET  $\text{rs}=\text{rs}+(\text{f} (10))$  IF  $\text{par}=0$ 
 $+(\text{f} (11)+\text{f} (12))$  IF  $\text{par}=0$ 
 $+(\text{f} (13)+2+(\text{di}/\text{LEN} (\text{rs}))$  OR  $\text{di}/(2$ 
 $(\text{f} (14))$  THEN GO TO 9650
9650 GO TO 9660+20+ $\text{par}(\text{rs})+(\text{yax}$ 
 $\text{ax}+(\text{di}/2)+\text{f} (15)+\text{f} (16)+\text{f} (17)$ 
9650 LET  $\text{par}=\text{par}-1$  LET  $\text{rs}="*"+$ 
" LET  $\text{rs}=\text{FN} (10)$ 
9652 IF  $\text{par}=0$  THEN GO TO 9660+20
9655 IF  $\text{fn} \neq (\text{di}/(2))+2+\text{FN} (\text{di}/$ 
 $\text{LEN} (\text{rs}))$ 
9654 GO TO 9660-10+ $\text{FN} (10)+\text{f} (17)/$ 
 $\text{LEN} (\text{rs})$ 
9654 LET  $\text{q}=\text{FN} (15)$  LET  $\text{q}=\text{q}+2$ 
 $\text{q}=(1)+43+(\text{q}+2)+445+(\text{q}+3)+47+(\text{q}$ 
 $+4)+94+(\text{q}+5)$  LET  $\text{rs}=\text{rs}+\text{CHR} (\text{q})$ 
9662 GO TO 9670-30+ $\text{FN} (10)+\text{di}$ 
9670 LET  $\text{rs}="*"+\text{FN} (15)+\text{di}$ 
9670 IF  $\text{FN} (12)+3+\text{par}+(\text{ax})$  AND
 $(\text{FN} (13)+(\text{di}/1))$  THEN LET  $\text{par}=\text{par}$ 
 $+1$  LET  $\text{rs}="*"+\text{FN} (10)$  GO TO 9672
9671 LET  $\text{rs}=\text{rs}+\text{CHR} (177+\text{FN} (8))$ 
9672 IF  $\text{FN} (17)+3+\text{par}+(\text{di}$ 
 $+3)+\text{LEN} (\text{rs})$  OR  $\text{di}/\text{FN} (1$ 
 $5)$  THEN GO TO 9640
9674 GO TO 9670
9685 LET  $\text{e}=" "$  RETURN
9690 LET  $\text{ense}=" "$  THEN RETURN
9692 PRINT AT 15.0, "De derivand
O queda "
9700 IF  $\text{ense}=0$  THEN GO TO 9750
9700 IF  $\text{ense}=2$  THEN RETURN
9703 CLS PRINT AT 0.0, "Funcion
9705
9705 PRINT AT 3.0, "Tenemos "  $\text{bs}$ 
" PAPER 7: INVERSE 1.85: GO TO 1.
9710 PRINT  $\text{e}:(1+1)$  TO  $\text{LEN} (\text{e})$ 
9715 IF  $\text{ense}=2$  THEN GO TO 9750
9720 LET  $\text{J}=\text{J}+1$ 
9750 BEP 1.10 PRINT AT 20.20,
"De acuerdo "
9755 IF  $\text{INKEY} (" ")$  THEN PRINT AT
20.20, " " RETURN
9760 GO TO 9755
9760 PRINT AT 3.0, "Derivando "
```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## PLANO AFIN (1)

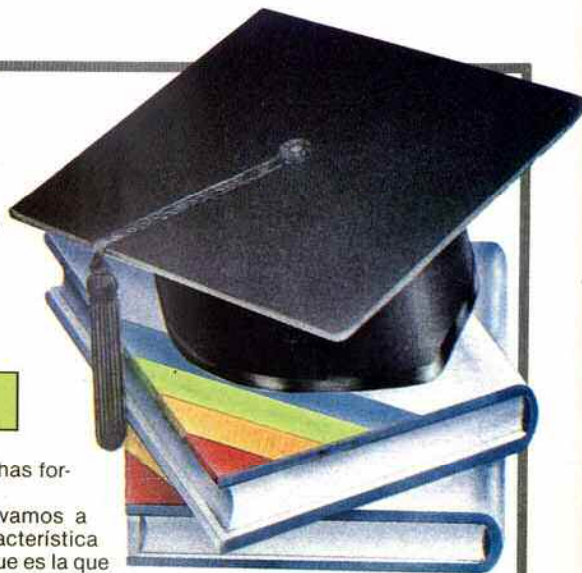
El programa de esta semana está pensado para ayudaros con los problemas de rectas en el plano afín, una parte del temario de BUP. En próximas semanas os presentaremos otro, esta vez sobre cambios de base y diversos problemas más. De momento, vamos a explicaros qué hace éste y cómo manejarlo.

El programa proporciona las ecuaciones de una recta en cinco formas: paramétrica, implícita, segmentaria y continua, una vez se define la recta de

que se trate por uno de estos cuatro métodos: dando dos puntos, un punto y un vector de dirección, un punto y la pendiente o los segmentos que define sobre los ejes. Otra aplicación práctica sería el cambio de ecuación. Por ejemplo, dada la forma explícita bien podemos hallar un punto y la pendiente, con lo que, entrando en el menú, podremos obtener cualquiera de las otras formas de ecuaciones de la recta. El programa es simple de manejar y probablemente le sacareis

partido de muchas formas.

Por último, vamos a explicar su característica fundamental, que es la que ha hecho que el listado se alargara un poco. Consiste en que, como en alguna otra ocasión, el programa puede manejar números enteros y fracciones indistintamente, y no sólo en los resultados, sino también en los INPUTS. Para introducir una fracción debéis teclear numerador, raya de fracción y denominador, y nunca decimales (por



ejemplo 17/5, —3/2). Hemos buscado con ello, como siempre, que el programa opere de la misma forma en que operáis vosotros, para que con él podáis aprender rápidamente lo que en clase no siempre resulta tan fácil.

```

2 CLENR 64999 GO SUB 8000 R
ESTORE DIM A(2). BORDER 6 PAP
ER 6
LET frac=(2-2000 DIM d(3,2)
DIM P(2,2) DIM d(2,2) DIM i(
3,2) DIM s(2,2) DIM c(2,2)
50 DEF FN 1680
100 IF FN 1=CODE SCREENS (24
-PEEK 23699,30-PEEK 23688)
110 IF FN 1=CODE PRINT AT
0,4 ECURATIONS OF A RECTA
120 FOR i=1 TO 5 READ line_d
130 PRINT line_d,45 NEXT i
140 DATA 3,8,10,14,18 Exp
150 c(1,1)=10, c(1,2)=14, c(2,
1)=18, c(2,2)=30
160 LOT 000 DRAW 0,24 FO
R i=1 TO 2 READ p,s:ind
170 P(1,1)=ind AT p+ind,13:p,s
180 IF i=1 THEN GO SUB frac
190 IF i=1 THEN PRINT
200 LET a(1)=ind,2,1 LET a(
2)=p(ind,2,2) IF a(1)/a(2)>0 TH
EN PRINT
210 IF i=1 THEN GO SUB frac
220 NEXT i
230 LET x="1" y="2"
240 DATA "x"="1" y="2" LET a(
1)=x,1,1 LET a(2)=y,1,2 IF a
(1)=1 THEN GO SUB frac
250 IF a(1)=1 THEN GO SUB 999
260 PRINT
270 LET a(1)=a(2,1) LET a(2)=a
(2,2) IF a(1)/a(2)>0 THEN PRINT
280 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
290 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
300 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
310 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
320 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
330 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
340 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
350 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
360 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
370 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
380 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
390 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
400 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
410 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
420 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
430 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
440 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
450 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
460 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
470 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
480 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
490 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
500 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
510 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
520 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
530 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
540 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
550 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
560 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
570 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
580 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
590 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
600 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
610 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
620 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
630 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
640 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
650 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
660 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
670 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
680 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
690 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
700 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
710 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
720 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
730 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
740 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
750 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
760 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
770 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
780 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
790 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
800 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
810 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
820 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
830 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
840 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
850 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
860 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
870 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
880 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
890 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
900 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
910 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
920 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
930 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
940 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
950 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
960 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
970 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
980 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
990 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac
1000 IF a(1)=1 THEN GO SUB frac

```

```

380 IF i=2 THEN PRINT AT 20,p11
390 SUB r/r;
390 NEXT i
395 GO SUB 500 GO TO 1600
400 STOP
410 LET a1=(ABS a(1) AND ABS a(
411 )-ABS a(2))+(ABS a(2) AND ABS
412 )-ABS a(3)
420 LET a2=ABS a(1)+ABS a(2)-a1
425 IF NOT a2 THEN RETURN
430 LET r=(a1/a2)*INT (1/a2)
440 IF r=0 THEN LET a1=a1/a2
445 IF a(2)=a1/a2; a2: RETURN
450 LET a1=a2; LET a2=r; GO TO
460
500 PRINT #0 AT 1,8; "Pulsar una
510 "tecla para continuar"
TAB 2,4: RETURN PRINT #0 AT 1,8
560 FOR i=1 TO LEN d$: IF j%(i)
570 THEN d$(i)=d$(i)+1; d$(i) TO 1
580 LET j=i
590 GO TO 620
610 NEXT i LET a(1)=VAL d$ LE
620 RETURN
100 FOR j=1 TO 2
110 FOR i=1 TO 2
120 LET c(1,i)=p(1,j)-1; c(1,i)+-1
125 IF (i=2 AND i=1)
130 THEN c(1,i)=0: NEXT i
135 IF i%4=3 THEN GO TO 1500
140 RETURN
145 LET s(1,i)=c(1,i) LET s(2,
150 )=c(2,i)
155 LET s(1,1)=s(1,1)+c(1,2)
160 LET s(1,2)=s(1,2)+c(1,1)
165 LET s(2,1)=s(2,1)+c(2,2)
170 LET s(2,2)=s(2,2)+c(2,1)
175 IF i%4=4 THEN GO TO 1200
180 RETURN
185 FOR i=1 TO 2 LET p(1,i)=
190 LET p(2,i)=s(1,i)
195 LET p(2,1)=s(2,1) LET p(
200 )=s(2,2)
205 NEXT i LET p(1,2)=s(1,2)+
210 LET p(2,2)=1
215 RETURN
220 IF i=5 THEN GO TO 1100
230 FOR i=1 TO 2 LET i(1,i)=c(
240 )=c(2,1)+p(1,i)-1
245 LET i(2,1)=c(2,1)+p(2,i)-1
250 NEXT i
255 LET a(1)=c(1,1)+i(1,2)+c(2,1)
260 LET a(2)=c(1,2)+c(1,1)+c(2,1)
265 LET a(3)=c(2,2)+i(3,1)+a(1)
270 LET (3,2)=a(2)
275 IF i THEN GO TO 1300
280 RETURN
285 CLS PRINT AT 3,12; INVERS
290 "E" STORE a(1) TO a(2)
300 TO 4: READ a3: PRINT AT 4,2; a
310
320 DATA 1 NEXT i: vector "Dos
330 puntos", "Punto 4 pendiente", "569
340 mentos en los ojos"
350 IF OR CODE INKEY$, "S2" THEN GO TO
360
370 GO SUB 1600+100*VAL INKEY$
380 GO SUB 1000+100*(i%3)
390 GO TO 100
400 FOR i=1 TO 2 STEP -1
410 GO SUB 2300-100+i: LET a(1,
420 )=a(1): LET p(1,1)=a(2)+a(2): LE
430 t=a(2)+a(2) GO 600 LET i(2,1)=
440 LET p(2,1)=a(2)
450 NEXT i LET i%4=1
460 LET p(1,1)=a(2) LET p(1,1)+a(
470 )=a(2) LET p(2,1)=a(2) LET d$(
480 )=p(1,1)+p(2,1)
490 GO TO 100

```

[illegible]

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## PROGRESIONES Y SUCESIONES

Este programa está especialmente dirigido a los alumnos de 1.º de BUP y, como indica su título, trata sobre las progresiones aritméticas y geométricas y de las sucesiones.

Como viene siendo habitual en esta sección, el programa está especialmente enfocado a enseñar; seguramente no lo podrá hacer tan bien como un verdadero profesor particular, pero estará siempre a vuestra disposición sin cobraros para nada.

El programa plantea problemas sobre las sucesiones y las progresiones arit-

méticas y te ayuda a resolverlos, con lo cual, te podremos asegurar que te aclarará muchas dudas sobre el tema.

Está pensado para plantear-te problemas y ayudarte y enseñarte a resolverlos, incluso directamente los que te ponga el profesor, que no tendrás dificultades en resolver de haber practicado. Es como un examen con ayudas.

Las clases de problemas que plantea son muchas entre ellas, hallar la suma de términos consecutivos de una progresión aritmética o geométrica, o hallar la ex-

presión de término general dados dos de la progresión, interpolación y otros.

Cuando os pide la solución basta con teclear «ayuda» para que os enseñe a solventar el problema y si se teclea otra vez, cuando pide de nuevo la solución os da ésta.

Seguramente os conviene recordar que el término general de una progresión aritmética es  $a_n = d \cdot n + b$  donde  $d$  es la llamada «diferencia» y es la diferencia entre dos términos de una progresión aritméti-

tica es  $a_k = a_q + (k - q) \cdot d$ .

Para una progresión aritmética es:

$a_n = b \cdot r^n$  donde  $r$  es la «razón» que es el cociente entre dos términos consecutivos. También se cumple que  $a_k = a_q \cdot r^{(k-q)}$ .

También hay que señalar, para los que no estén muy acostumbrados a la notación del Spectrum que  $\sqrt[n]{A} \uparrow (1/n)$  es lo mismo que  $\sqrt[n]{A}$ .



```

10 LET pas=0: DIM x(10)
11 LET ayuda=1:2345
12 DEF FN a(i)=STR$(FN r(18)-
9) " " + STR$(FN r(18)-9)
15 DIM b$(2,7): DIM a$(14,7)
RESTORE 500
20 FOR i=1 TO 14: READ a$(i):
NEXT
30 DEF FN r(x)=1+INT (RND*x)
30 DATA " MENU 1- SERIES
" PROG. ARITMETICAS
" 3- PROG. GEOMETRICAS
" 4- GENERAL
99 RESTORE 50
100 FOR i=1 TO 5: BEEP .1,7+f:
READ us: PRINT AT 1+2*f,4,us: NE
XT 7
110 LET a0=CODE INKEY$. LET aq=
a4+6: IF (a4+1)+(a4+4)=1 THEN G
O TO 110
120 LET menu1=aq:CLS: GO SUB
100+50*aq: RUN
150 GO TO 1000
200 LET da=(FN r(18)-9): LET ba
=(FN r(18)-9): LET es=STR$(da+*
n)+STR$(ba): LET ps="aritmética"
210 LET f=(FN r(18)-9): GO TO 280
250 LET r=(FN r(18)-9)+1: LET da=r+5
GN (3,5-FN r(14)): LET rda=LET
ba=FN r(15)
255 LET es=STR$(da+*n): LET e
s=STR$(ba)+*+es
260 LET f=(FN r(18)-9): LET ps="geo
métrica"
280 LET x(1)=FN r(14): LET x(2)=
5+FN r(14): LET k=x(2)-x(1)-1
282 FOR i=1 TO 2: LET n=x(1): L
ET e=(2+i)*VAL es: NEXT i
285 PRINT AT 0,0: "La expresión
general de una progresión
ps es: "a(n)= "f
290 LET menu2=FN r(14)+menu1-3):
GO TO 3000+1000*(menu2-3)-1000
+menu2-2)+1100*(menu2-1)
300 LET aq=FN r(13): GO TO 120
300 DATA "n": (n+1): (n-1): (2+
n-1)
520 DATA "(2+n+2)": (2+n-2)
530 DATA "n+2)": (n+2-1)": (n+2+
1)
540 DATA "n+3)": (2+n+2)": (n+2-
3)
1000 INPUT "Elige una dificultad
de 1 a 4": d1
1005 GO TO 1005+3*d1
1008 LET es=a$(FN r(7)): GO TO 1
020
1011 LET es=a$(7+FN r(7)): GO TO
1020
1017 FOR p=1 TO 2: LET b$(p)=a$(
7+(d1-f)*FN r(7)): NEXT p
1018 LET es=b$(1)+*+b$(2): GO
TO 1020
1020 GO TO 1100-70*(FN r(3)-1)
1030 PRINT AT 0,0: "El término ge
neral de la serie es a(n)= "
es
1033 GO TO 1035+35*(FN r(2)-1)
1035 LET rda=FN r(9): LET rda=FN
1040 PRINT AT 1,0: "Cual es el t
érmino : (rda): de esta prog
resión
1043 INPUT "a(n): (rda): "a: "x:
1045 LET f=(ABS (2*x-VAL es))/1e

```

```

-5): IF f=0 THEN GO TO 1060
1047 GO SUB 1050: GO TO 1043
1050 BEEP .3,0: PRINT AT 15,0: "L
o siento, pero esta mal, prueba
otra vez
" RETURN
1060 FOR t=1 TO 3: BEEP .1,10+t:
NEXT t
1065 PRINT AT 18,0: "En efecto, e
sta bien
" GO TO 1067
1067 PRINT AT 20,0: "Pulsa una te
cla": PAUSE 0: RETURN
1070 LET q1=FN r(5): LET q2=FN r
(4)+5
1075 PRINT AT 14,0: "Dame los tér
minos de la serie: a1: "a1: "a2: de es
ta serie
1080 FOR q=q1 TO q2: LET n=aq: LE
T rda=FN r(14)
1090 GO SUB 1040: NEXT q
1095 RETURN
1100 PRINT AT 2,0: "Sabido que
los 5 primeros términos de
la serie son:
1110 GO TO 1110+5*d1
1120 PRINT AT 5,0: "Para f=1 TO 5
LET r=1: PRINT VAL es: "NE
XT f
1130 PRINT AT 5,0: "Para f=1 TO 5
PRINT VAL b$(1): "VAL b$(2):
" NEXT f
1200 PRINT AT 9,0: "Dame cual es
el término general (ENTER para s
olución)"
1210 INPUT LINE s$
1220 IF s$="" THEN GO TO 1300
1225 GO SUB 1230: IF mal=0 THEN
RETURN
1227 GO TO 1210
1229 INPUT LINE s$: IF s$="ayuda
" THEN GO SUB 4195: GO SUB 6000
GO TO 1229-162*(pas=2)
1230 FOR n=3 TO 7: IF VAL s$(VAL
L es THEN LET mal=1: GO SUB 1050
RETURN
1235 NEXT n: LET mal=0: GO TO 10
60
1300 PRINT AT 14,0: "La solución
es: "a(n)= "es: GO TO 1067
2000 PRINT AT 5,0: "Sabido que
"x(3): "y "x(4): "son los tér
minos "x(1): "y "x(2): "de la p
rogresión. Obtener la expresión
general
2050 GO SUB 1229: IF mal=0 THEN
RETURN
2055 GO TO 2050
3001 LET s$="La suma es:
3002 IF menu2=5 THEN PRINT "Obte
ner el producto desde el primero
hasta el segundo": GO TO 3005
3003 PRINT "Obtener la suma de d
e el primero hasta el segundo
3005 IF menu2=3 THEN LET sol=(x
(3)-x(4)+d1)/(1-da+1e-6): GO TO
3010
3007 LET sol=(x(3)+x(4))+x(2)-
x(1)+1/2
3010 IF menu2=5 THEN LET sol=50
R (x(3)+x(4))+x(2)-x(1)+1: LET

```

```

s$="el producto = "
3011 INPUT (s$) sol: IF sol=ayuda
3 THEN GO SUB 9000: GO TO 3011
3020 IF (ABS (sol-VAL sol))/10
0 THEN GO SUB 1050: GO TO 3010
3040 GO TO 1060
4000 DATA "La diferencia es d=(b
2-b1)/(x4-x1)"
4010 DATA "La razón es r=(b2/b1)
+1/(x4-x1)"
4020 RESTORE 4000+10*(menu1-3):
RESTORE 0
4040 PRINT AT 4,0: "Interpolación
k: " términos entre "x(3): "y "
x(4): " sabiendo que son términos
de una progresión "ps
4050 FOR i=1 TO k: "sol: LET n=
2,1+*
4055 IF sol=ayuda THEN GO SUB 42
00: GO TO 4053
4065 IF ABS (VAL es-sol)/1e-5 TH
EN GO SUB 1050: GO TO 4053
4070 NEXT i: GO SUB 1050
4080 FOR i=1 TO 4: PRINT AT 11+i
,0: "
4082 NEXT i
4100 BEEP .1,0: BEEP .2,20: PRIN
T AT 5,0: "Sabido que "x(3): "
es el término número "x(1): " de
la progresión. Dame el término
general
4110 IF menu2=1 THEN GO SUB 8000
+menu1
4120 GO SUB 1229
4140 IF mal=0 THEN RETURN
4150 GO TO 4120
4195 FOR b=1 TO 2: BEEP .1,10: B
EEP .1,0: NEXT b: RETURN
4200 GO SUB 4195
4205 PRINT AT 10,0: "Si entre los
números b1 y b2 de una progresi
ón "ps: " quiero interpolación nu
mérica
4210 RETURN
6000 IF pas=0 THEN LET pas=1: PR
INT AT 14,0: "Sustituye los datos
en la expresión general y tend
rás: " GO TO 7021+menu2-3+menu
2-3)
6002 LET mal=0: LET pas=2: PRINT
AT 11,0: "La solución es: "a(n)
" RETURN
7022 PRINT "una ecuación con un
a incógnita": RETURN
7023 PRINT "dos ecuaciones con d
os incógnitas": RETURN
8002 PRINT "si la diferencia es
d= "d1: RETURN
8003 PRINT "si la razón es r= "
r1: RETURN
9000 IF pas=1 THEN GO TO 9003
9001 LET pas=1: PRINT AT 14,0: "S
abido que los términos d y f
ad y ak son los términos d y f
de la progresión: " GO TO 9020
+menu1+10*(menu2-5)
9003 PRINT AT 11,0: "es: "sol
" GO TO 1067
9022 PRINT "La suma vale (ad+ak)
+1-(d+1)/2": RETURN
9023 PRINT "La suma vale (ad+ak)
+1-(d+1)/2": RETURN
9040 PRINT "El producto vale 30R
(ad+ak)+(x-d+1)": RETURN

```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## PLANO AFIN 2

Esta es la segunda parte que os habíamos prometido publicar acerca del plano afin. La forma de utilizarla es haciendo un MERGE encima del programa PLANO AFIN 1, con lo que se os abrirá un nuevo abanico de posibilidades que pasamos a describir:

Teclear RUN y aparecerá un menú general con cuatro opciones, de las cuales la primera coincide con el programa 1 aunque con ciertas modificaciones. La más importante de ellas la tendréis a la vista: Es la posibilidad de guardar rectas en memoria. Cuando las ecuaciones de una recta estén en pantalla, pulsando una tecla del 1 al 9, la podréis mantener en una de las nueve memorias, lo que os servirá no sólo para

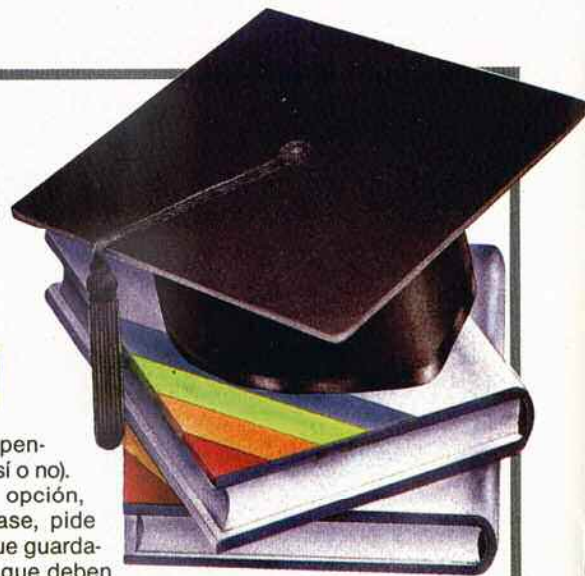
tener acceso a ellas en cualquier momento sino también para utilizar muchas de las restantes opciones del programa. Además, se incluyen una serie de modificaciones que permiten trabajar con rectas horizontales y verticales, así como con aquéllas que pasen por el origen que en el programa 1 podían dar dificultades por el hecho de no admitir ciertas formas de la ecuación.

La segunda posibilidad del menú general, o sea paralelismo y perpendicularidad, nos permite hacer tres cosas: Hallar una paralela o una perpendicular a una recta en memoria, (dando un punto por el que tenga que pasar) y comprobar la relación entre dos rectas en memoria (si son pa-

rales o perpendiculares entre sí o no).

La tercera opción, cambios de base, pide dos vectores que guarden en memoria (y que deben ser linealmente independientes) y los considera una base, proporcionando las componentes de cualquier punto o vector en esta nueva base a partir de sus coordenadas actuales. Esta opción propia de espacios vectoriales se incluye dado el gran engorro que supone efectuar el cambio a base de cálculos.

Y por último, la cuarta opción, Distancias e intersecciones, ofrece también 3 posibilidades: Hallar la distancia entre dos puntos que se introduzcan, hallar la mínima distancia de un punto a una



recta en memoria y hallar el punto de corte entre dos rectas (o sea, resolver el sistema que constituyen) aunque no está previsto resolver una recta horizontal con otra vertical por ser la solución obvia.

En resumen, esperamos que saquéis el máximo partido a este programa y os recordamos que posee un particular modo de introducir los datos numéricos (ya que trabaja con fracciones) que os explicábamos junto con «plano afin 1» y que se mantiene en la mezcla de los dos.

```
10 GO TO 70
20 CLS : PRINT AT 3,3: INVERSE
1. "MENU GENERAL." RESTORE 20: F
OR I=1 TO 4: READ AS: PRINT AT 4
+3+I,6,1: "1": AS: BEEP 15,341: NE
XT I
30 DATA "EQUACIONES DE LA RECTA",
"PARALELISMO Y",
"PERPENDICULARIDAD", "CAMBIOS
DE BASE", "DISTANCIAS E",
"INTERSECCIONES"
40 GO SUB 500: IF CODE INKEYS<
49 OR CODE INKEYS=52 THEN GO TO
40
50 GO TO 3000+100*VAL INKEY$
70 DIM V(2,2): DIM M(9,2,2): D
IM H(2,2)
85 GO TO 20
175 IF NOT I(2,1)=I(1,2) THEN G
O TO 205
240 IF NOT I(1,1)=I(1,2)+I(2,1)
+I(2,2) THEN GO TO 2700
248 IF NOT E(2,1) THEN GO TO 20
395 GO TO 2700
400 LET A(1)=A(1)+SGN A(2): LET
SGN=SGN A(2): LET A(2)=ABS A(2)
700 IF NOT S(2,2) THEN GO TO 73
0
710 LET P(1,1)=1: LET P(1,1,2)
=1: LET P(1,2)=0: LET P(1,2,2)
=1: LET P(2,2)=E(2,1): LET P(2,2,2)=E(2,1): LET P(2,1,1)=0: LET P(2,1,2)=1
720 IF S(1,2) THEN LET P(2,1,1)=E(1,1): LET P(2,1,2)=E(1,2): LET P(2,2,1)=0: LET P(2,2,2)=1
725 RETURN
730 LET P(1,1)=0: LET P(1,1,2)=1: LET P(1,2,1)=E(2,1): LET P(1,2,2)=1: LET P(2,1,1)=1: LET P(2,1,2)=1: LET P(2,2,1)=0: LET P(2,2,2)=1
1425 IF NOT S(1,1)+S(2,1)+S(1,2)+S(2,2) THEN GO SUB 700
1505 FOR I=1 TO 2: LET A(1)=I(1,1): LET A(2)=I(1,2): LET I(1,1)=A(1): LET I(1,2)=A(2)
1605 PRINT AT 14,6: "5) Llamar memoria"
1630 IF CODE INKEYS<49 OR CODE INKEYS=53 THEN GO TO 1630
1635 IF INKEYS="5" THEN GO TO 2300
2300 INPUT "Introduce el número de la memoria (1 a 9)": MEMO
2310 IF MEMO<1 OR MEMO>9 OR MEMO=0 THEN GO TO 2300
2315 IF NOT (MEMO=1,2) OR (MEMO=2,2) OR (MEMO=1,1) OR (MEMO=2,1) THEN PRINT "Memoria va a ser"
2320 GO SUB 340: GO TO 100
2340 FOR I=1 TO 2: FOR J=1 TO 2: LET E(I,J)=M(MEMO,I,J): NEXT J: NEXT I: LET I=2: GO SUB 1200
2350 RETURN
```

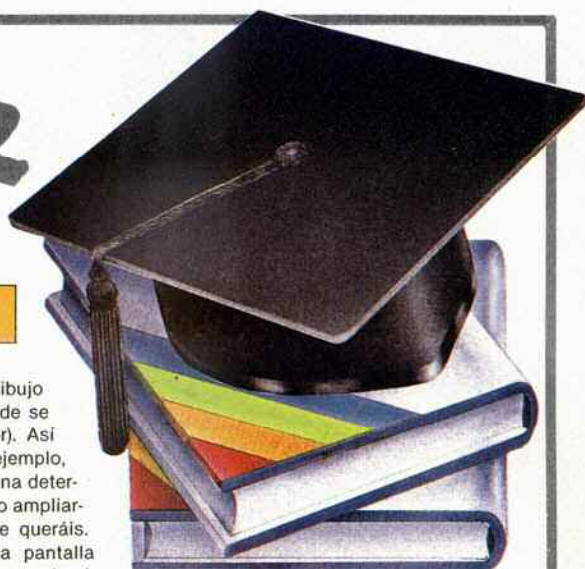
```
2700 PRINT 80: "Pulse número de memoria o volver": PAUSE 0
2710 IF CODE INKEYS<40 AND CODE INKEYS<59 THEN LET MEMO=VAL INKEY$: GO TO 2730
2720 GO TO 20
2730 FOR I=1 TO 2: FOR J=1 TO 2: LET M(MEMO,I,J)=I(1,1): NEXT J: NEXT I
51. MEMO: MEMORIZANDO: PAUSE 100: INPUT " "
2740 GO TO 2700
3100 GO TO 1000
3200 CLS: PRINT AT 4,2: "Opciones"
5. "1) Comprobar dos rectas"
2. "Obtener una paralela"
3. "Obtener una perpendicular"
3210 GO SUB 500: IF CODE INKEYS<40 AND CODE INKEYS=52 THEN LET OPC=VAL INKEY$: GO TO 3190+30*OPC
3215 GO TO 3210
3220 GO SUB 1000
3230 IF M(1,1,1)+M(2,1,1)+M(1,1,2)+M(2,1,2)=0 THEN PRINT "Rectas perpendiculares": GO SUB 0 GO TO 3245
3240 PRINT "NI PARALELAS NI PERPENDICULARES": GO SUB 500
3245 GO TO 20
3250 INPUT "Memoria de la recta a la que es paralela": MEMO: LET E(1,1)=M(MEMO,1,1): LET E(1,2)=M(MEMO,1,2): GO TO 3700
3260 INPUT "Memoria de la recta a la que es perpendicular": MEMO: LET E(1,1)=M(MEMO,1,1): LET E(1,2)=M(MEMO,1,2): GO TO 3700
3300 GO TO 4000
3400 CLS: PRINT AT 4,2: "Opciones"
5. "1) Distancia punto-recta"
2. "Distancia entre dos puntos"
3. "Punto de corte de dos rectas"
3410 GO SUB 500: IF CODE INKEYS<40 AND CODE INKEYS=52 THEN LET OPC=VAL INKEY$: GO TO 3390+30*OPC
3415 GO TO 3410
3420 INPUT "Memoria de la recta": MEMO: GO SUB 2100: DIM Z(2)
3425 LET Z(1)=A(1): LET Z(2)=A(2)
3430 IF OPC=1: GO SUB 600: DIM V(2): LET V(1)=A(1): LET V(2)=A(2)
3435 GO SUB 2340: LET DIST=ABS(I(1,1)+Z(1)/I(1,2)-Z(2))/(1+Z(2)/I(1,2)+Z(2)/I(2,2))
3440 PRINT AT 17,0: "La distancia es: dist"
3450 DIM Z(2,2): FOR I=1 TO 2: GO SUB 2100: LET Z(I,1)=A(1): LET Z(I,2)=A(2)
3455 LET DIST=ABS(Z(1,1,1)/Z(1,1,2)-Z(1,2,1)/Z(1,2,2))/2
3460 LET DIST=ABS(Z(2,1,1)/Z(2,1,2)-Z(2,2,1)/Z(2,2,2))/2
3470 LET DIST=ABS(DIST)
3475 PRINT AT 17,0: "La distancia es: dist": G
```

```
0 SUB 500: GO TO 20
3480 GO SUB 3600
3490 LET A(1)=M(1,1,1)+M(2,1,1): LET A(2)=M(1,1,2)+M(2,1,2): LET I(1,1)=A(1): LET I(1,2)=A(2)
3500 LET A(1)=M(1,2,1)+M(2,2,1): LET A(2)=M(1,2,2)+M(2,2,2): LET I(1,1)=A(1): LET I(1,2)=A(2)
3510 PRINT "Coordenada x: "
3520 GO SUB 7000
3515 IF ABS A(2)<1 THEN LET A(1)=A(1)+SGN A(2)
3520 LET A(1)=M(1,1,1)+M(2,1,1): LET A(2)=M(1,1,2)+M(2,1,2): LET I(1,1)=A(1): LET I(1,2)=A(2)
3530 PRINT "Coordenada y: "
3540 GO SUB 7000: GO SUB 500: GO TO 20
3600 INPUT "Introduce las memorias de ambas rectas: 1. recta 1: recta 2: recta 3: recta 4: recta 5: recta 6: recta 7: recta 8: recta 9: recta 10: recta 11: recta 12: recta 13: recta 14: recta 15: recta 16: recta 17: recta 18: recta 19: recta 20: recta 21: recta 22: recta 23: recta 24: recta 25: recta 26: recta 27: recta 28: recta 29: recta 30: recta 31: recta 32: recta 33: recta 34: recta 35: recta 36: recta 37: recta 38: recta 39: recta 40: recta 41: recta 42: recta 43: recta 44: recta 45: recta 46: recta 47: recta 48: recta 49: recta 50: recta 51: recta 52: recta 53: recta 54: recta 55: recta 56: recta 57: recta 58: recta 59: recta 60: recta 61: recta 62: recta 63: recta 64: recta 65: recta 66: recta 67: recta 68: recta 69: recta 70: recta 71: recta 72: recta 73: recta 74: recta 75: recta 76: recta 77: recta 78: recta 79: recta 80: recta 81: recta 82: recta 83: recta 84: recta 85: recta 86: recta 87: recta 88: recta 89: recta 90: recta 91: recta 92: recta 93: recta 94: recta 95: recta 96: recta 97: recta 98: recta 99: recta 100: recta 101: recta 102: recta 103: recta 104: recta 105: recta 106: recta 107: recta 108: recta 109: recta 110: recta 111: recta 112: recta 113: recta 114: recta 115: recta 116: recta 117: recta 118: recta 119: recta 120: recta 121: recta 122: recta 123: recta 124: recta 125: recta 126: recta 127: recta 128: recta 129: recta 130: recta 131: recta 132: recta 133: recta 134: recta 135: recta 136: recta 137: recta 138: recta 139: recta 140: recta 141: recta 142: recta 143: recta 144: recta 145: recta 146: recta 147: recta 148: recta 149: recta 150: recta 151: recta 152: recta 153: recta 154: recta 155: recta 156: recta 157: recta 158: recta 159: recta 160: recta 161: recta 162: recta 163: recta 164: recta 165: recta 166: recta 167: recta 168: recta 169: recta 170: recta 171: recta 172: recta 173: recta 174: recta 175: recta 176: recta 177: recta 178: recta 179: recta 180: recta 181: recta 182: recta 183: recta 184: recta 185: recta 186: recta 187: recta 188: recta 189: recta 190: recta 191: recta 192: recta 193: recta 194: recta 195: recta 196: recta 197: recta 198: recta 199: recta 200: recta 201: recta 202: recta 203: recta 204: recta 205: recta 206: recta 207: recta 208: recta 209: recta 210: recta 211: recta 212: recta 213: recta 214: recta 215: recta 216: recta 217: recta 218: recta 219: recta 220: recta 221: recta 222: recta 223: recta 224: recta 225: recta 226: recta 227: recta 228: recta 229: recta 230: recta 231: recta 232: recta 233: recta 234: recta 235: recta 236: recta 237: recta 238: recta 239: recta 240: recta 241: recta 242: recta 243: recta 244: recta 245: recta 246: recta 247: recta 248: recta 249: recta 250: recta 251: recta 252: recta 253: recta 254: recta 255: recta 256: recta 257: recta 258: recta 259: recta 260: recta 261: recta 262: recta 263: recta 264: recta 265: recta 266: recta 267: recta 268: recta 269: recta 270: recta 271: recta 272: recta 273: recta 274: recta 275: recta 276: recta 277: recta 278: recta 279: recta 280: recta 281: recta 282: recta 283: recta 284: recta 285: recta 286: recta 287: recta 288: recta 289: recta 290: recta 291: recta 292: recta 293: recta 294: recta 295: recta 296: recta 297: recta 298: recta 299: recta 300: recta 301: recta 302: recta 303: recta 304: recta 305: recta 306: recta 307: recta 308: recta 309: recta 310: recta 311: recta 312: recta 313: recta 314: recta 315: recta 316: recta 317: recta 318: recta 319: recta 320: recta 321: recta 322: recta 323: recta 324: recta 325: recta 326: recta 327: recta 328: recta 329: recta 330: recta 331: recta 332: recta 333: recta 334: recta 335: recta 336: recta 337: recta 338: recta 339: recta 340: recta 341: recta 342: recta 343: recta 344: recta 345: recta 346: recta 347: recta 348: recta 349: recta 350: recta 351: recta 352: recta 353: recta 354: recta 355: recta 356: recta 357: recta 358: recta 359: recta 360: recta 361: recta 362: recta 363: recta 364: recta 365: recta 366: recta 367: recta 368: recta 369: recta 370: recta 371: recta 372: recta 373: recta 374: recta 375: recta 376: recta 377: recta 378: recta 379: recta 380: recta 381: recta 382: recta 383: recta 384: recta 385: recta 386: recta 387: recta 388: recta 389: recta 390: recta 391: recta 392: recta 393: recta 394: recta 395: recta 396: recta 397: recta 398: recta 399: recta 400: recta 401: recta 402: recta 403: recta 404: recta 405: recta 406: recta 407: recta 408: recta 409: recta 410: recta 411: recta 412: recta 413: recta 414: recta 415: recta 416: recta 417: recta 418: recta 419: recta 420: recta 421: recta 422: recta 423: recta 424: recta 425: recta 426: recta 427: recta 428: recta 429: recta 430: recta 431: recta 432: recta 433: recta 434: recta 435: recta 436: recta 437: recta 438: recta 439: recta 440: recta 441: recta 442: recta 443: recta 444: recta 445: recta 446: recta 447: recta 448: recta 449: recta 450: recta 451: recta 452: recta 453: recta 454: recta 455: recta 456: recta 457: recta 458: recta 459: recta 460: recta 461: recta 462: recta 463: recta 464: recta 465: recta 466: recta 467: recta 468: recta 469: recta 470: recta 471: recta 472: recta 473: recta 474: recta 475: recta 476: recta 477: recta 478: recta 479: recta 480: recta 481: recta 482: recta 483: recta 484: recta 485: recta 486: recta 487: recta 488: recta 489: recta 490: recta 491: recta 492: recta 493: recta 494: recta 495: recta 496: recta 497: recta 498: recta 499: recta 500: recta 501: recta 502: recta 503: recta 504: recta 505: recta 506: recta 507: recta 508: recta 509: recta 510: recta 511: recta 512: recta 513: recta 514: recta 515: recta 516: recta 517: recta 518: recta 519: recta 520: recta 521: recta 522: recta 523: recta 524: recta 525: recta 526: recta 527: recta 528: recta 529: recta 530: recta 531: recta 532: recta 533: recta 534: recta 535: recta 536: recta 537: recta 538: recta 539: recta 540: recta 541: recta 542: recta 543: recta 544: recta 545: recta 546: recta 547: recta 548: recta 549: recta 550: recta 551: recta 552: recta 553: recta 554: recta 555: recta 556: recta 557: recta 558: recta 559: recta 560: recta 561: recta 562: recta 563: recta 564: recta 565: recta 566: recta 567: recta 568: recta 569: recta 570: recta 571: recta 572: recta 573: recta 574: recta 575: recta 576: recta 577: recta 578: recta 579: recta 580: recta 581: recta 582: recta 583: recta 584: recta 585: recta 586: recta 587: recta 588: recta 589: recta 590: recta 591: recta 592: recta 593: recta 594: recta 595: recta 596: recta 597: recta 598: recta 599: recta 600: recta 601: recta 602: recta 603: recta 604: recta 605: recta 606: recta 607: recta 608: recta 609: recta 610: recta 611: recta 612: recta 613: recta 614: recta 615: recta 616: recta 617: recta 618: recta 619: recta 620: recta 621: recta 622: recta 623: recta 624: recta 625: recta 626: recta 627: recta 628: recta 629: recta 630: recta 631: recta 632: recta 633: recta 634: recta 635: recta 636: recta 637: recta 638: recta 639: recta 640: recta 641: recta 642: recta 643: recta 644: recta 645: recta 646: recta 647: recta 648: recta 649: recta 650: recta 651: recta 652: recta 653: recta 654: recta 655: recta 656: recta 657: recta 658: recta 659: recta 660: recta 661: recta 662: recta 663: recta 664: recta 665: recta 666: recta 667: recta 668: recta 669: recta 670: recta 671: recta 672: recta 673: recta 674: recta 675: recta 676: recta 677: recta 678: recta 679: recta 680: recta 681: recta 682: recta 683: recta 684: recta 685: recta 686: recta 687: recta 688: recta 689: recta 690: recta 691: recta 692: recta 693: recta 694: recta 695: recta 696: recta 697: recta 698: recta 699: recta 700: recta 701: recta 702: recta 703: recta 704: recta 705: recta 706: recta 707: recta 708: recta 709: recta 710: recta 711: recta 712: recta 713: recta 714: recta 715: recta 716: recta 717: recta 718: recta 719: recta 720: recta 721: recta 722: recta 723: recta 724: recta 725: recta 726: recta 727: recta 728: recta 729: recta 730: recta 731: recta 732: recta 733: recta 734: recta 735: recta 736: recta 737: recta 738: recta 739: recta 740: recta 741: recta 742: recta 743: recta 744: recta 745: recta 746: recta 747: recta 748: recta 749: recta 750: recta 751: recta 752: recta 753: recta 754: recta 755: recta 756: recta 757: recta 758: recta 759: recta 760: recta 761: recta 762: recta 763: recta 764: recta 765: recta 766: recta 767: recta 768: recta 769: recta 770: recta 771: recta 772: recta 773: recta 774: recta 775: recta 776: recta 777: recta 778: recta 779: recta 780: recta 781: recta 782: recta 783: recta 784: recta 785: recta 786: recta 787: recta 788: recta 789: recta 790: recta 791: recta 792: recta 793: recta 794: recta 795: recta 796: recta 797: recta 798: recta 799: recta 800: recta 801: recta 802: recta 803: recta 804: recta 805: recta 806: recta 807: recta 808: recta 809: recta 810: recta 811: recta 812: recta 813: recta 814: recta 815: recta 816: recta 817: recta 818: recta 819: recta 820: recta 821: recta 822: recta 823: recta 824: recta 825: recta 826: recta 827: recta 828: recta 829: recta 830: recta 831: recta 832: recta 833: recta 834: recta 835: recta 836: recta 837: recta 838: recta 839: recta 840: recta 841: recta 842: recta 843: recta 844: recta 845: recta 846: recta 847: recta 848: recta 849: recta 850: recta 851: recta 852: recta 853: recta 854: recta 855: recta 856: recta 857: recta 858: recta 859: recta 860: recta 861: recta 862: recta 863: recta 864: recta 865: recta 866: recta 867: recta 868: recta 869: recta 870: recta 871: recta 872: recta 873: recta 874: recta 875: recta 876: recta 877: recta 878: recta 879: recta 880: recta 881: recta 882: recta 883: recta 884: recta 885: recta 886: recta 887: recta 888: recta 889: recta 890: recta 891: recta 892: recta 893: recta 894: recta 895: recta 896: recta 897: recta 898: recta 899: recta 900: recta 901: recta 902: recta 903: recta 904: recta 905: recta 906: recta 907: recta 908: recta 909: recta 910: recta 911: recta 912: recta 913: recta 914: recta 915: recta 916: recta 917: recta 918: recta 919: recta 920: recta 921: recta 922: recta 923: recta 924: recta 925: recta 926: recta 927: recta 928: recta 929: recta 930: recta 931: recta 932: recta 933: recta 934: recta 935: recta 936: recta 937: recta 938: recta 939: recta 940: recta 941: recta 942: recta 943: recta 944: recta 945: recta 946: recta 947: recta 948: recta 949: recta 950: recta 951: recta 952: recta 953: recta 954: recta 955: recta 956: recta 957: recta 958: recta 959: recta 960: recta 961: recta 962: recta 963: recta 964: recta 965: recta 966: recta 967: recta 968: recta 969: recta 970: recta 971: recta 972: recta 973: recta 974: recta 975: recta 976: recta 977: recta 978: recta 979: recta 980: recta 981: recta 982: recta 983: recta 984: recta 985: recta 986: recta 987: recta 988: recta 989: recta 990: recta 991: recta 992: recta 993: recta 994: recta 995: recta 996: recta 997: recta 998: recta 999: recta 1000: recta 1001: recta 1002: recta 1003: recta 1004: recta 1005: recta 1006: recta 1007: recta 1008: recta 1009: recta 1010: recta 1011: recta 1012: recta 1013: recta 1014: recta 1015: recta 1016: recta 1017: recta 1018: recta 1019: recta 1020: recta 1021: recta 1022: recta 1023: recta 1024: recta 1025: recta 1026: recta 1027: recta 1028: recta 1029: recta 1030: recta 1031: recta 1032: recta 1033: recta 1034: recta 1035: recta 1036: recta 1037: recta 1038: recta 1039: recta 1040: recta 1041: recta 1042: recta 1043: recta 1044: recta 1045: recta 1046: recta 1047: recta 1048: recta 1049: recta 1050: recta 1051: recta 1052: recta 1053: recta 1054: recta 1055: recta 1056: recta 1057: recta 1058: recta 1059: recta 1060: recta 1061: recta 1062: recta 1063: recta 1064: recta 1065: recta 1066: recta 1067: recta 1068: recta 1069: recta 1070: recta 1071: recta 1072: recta 1073: recta 1074: recta 1075: recta 1076: recta 1077: recta 1078: recta 1079: recta 1080: recta 1081: recta 1082: recta 1083: recta 1084: recta 1085: recta 1086: recta 1087: recta 1088: recta 1089: recta 1090: recta 1091: recta 1092: recta 1093: recta 1094: recta 1095: recta 1096: recta 1097: recta 1098: recta 1099: recta 1100: recta 1101: recta 1102: recta 1103: recta 1104: recta 1105: recta 1106: recta 1107: recta 1108: recta 1109: recta 1110: recta 1111: recta 1112: recta 1113: recta 1114: recta 1115: recta 1116: recta 1117: recta 1118: recta 1119: recta 1120: recta 1121: recta 1122: recta 1123: recta 1124: recta 1125: recta 1126: recta 1127: recta 1128: recta 1129: recta 1130: recta 1131: recta 1132: recta 1133: recta 1134: recta 1135: recta 1136: recta 1137: recta 1138: recta 1139: recta 1140: recta 1141: recta 1142: recta 1143: recta 1144: recta 1145: recta 1146: recta 1147: recta 1148: recta 1149: recta 1150: recta 1151: recta 1152: recta 1153: recta 1154: recta 1155: recta 1156: recta 1157: recta 1158: recta 1159: recta 1160: recta 1161: recta 1162: recta 1163: recta 1164: recta 1165: recta 1166: recta 1167: recta 1168: recta 1169: recta 1170: recta 1171: recta 1172: recta 1173: recta 1174: recta 1175: recta 1176: recta 1177: recta 1178: recta 1179: recta 1180: recta 1181: recta 1182: recta 1183: recta 1184: recta 1185: recta 1186: recta 1187: recta 1188: recta 1189: recta 1190: recta 1191: recta 1192: recta 1193: recta 1194: recta 1195: recta 1196: recta 1197: recta 1198: recta 1199: recta 1200: recta 1201: recta 1202: recta 1203: recta 1204: recta 1205: recta 1206: recta 1207: recta 1208: recta 1209: recta 1210: recta 1211: recta 1212: recta 1213: recta 1214: recta 1215: recta 1216: recta 1217: recta 1218: recta 1219: recta 1220: recta 1221: recta 1222: recta 1223: recta 1224: recta 1225: recta 1226: recta 1227: recta 1228: recta 1229: recta 1230: recta 1231: recta 1232: recta 1233: recta 1234: recta 1235: recta 1236: recta 1237: recta 1238: recta 1239: recta 1240: recta 1241: recta 1242: recta 1243: recta 1244: recta 1245: recta 1246: recta 1247: recta 1248: recta 1249: recta 1250: recta 1251: recta 1252: recta 1253: recta 1254: recta 1255: recta 1256
```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEÓN

## SISTEMAS DE INECUACIONES



El programa que os presentamos esta semana va dirigido de nuevo a los estudiantes de 1.º de BUP y proporciona un método sencillo e infalible para que vosotros mismos resolváis los sistemas de inecuaciones y tengáis las ideas claras acerca de lo que estáis haciendo.

Podéis entrar en el programa con una o dos inecuaciones, y con una o dos incógnitas ( $x$  e  $y$ ). Para empezar vamos a explicaros el caso más general de dos inecuaciones con dos incógnitas. La solución se puede dar en un plano representando las dos curvas que se obtienen sustituyendo la desigualdad por un signo igual. En vuestro caso estas curvas serán siempre, después de operar convenientemente, rectas o parábolas de eje vertical y por tanto de la forma  $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ . El programa en cuestión os pide esos cuatro valores:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  (algunos pueden ser cero, por supuesto, si no existe ese término), y representa ambas curvas en una escala que él elige. Una expresión  $Ax^2 + Bx + D = 0$  se considera como dos rectas  $x = a$  y  $x = b$ , siendo  $a$  y  $b$  las soluciones de la ecuación, o bien no se con-

sidera si no existen soluciones.

Una vez representadas las curvas la solución consiste en decir las regiones del plano en las cuales se cumplen ambas inequaciones. Para ello sale en pantalla un cursor que podéis mover con las teclas 5, 6, 7 y 8 y cuya posición (abcisa y ordenada) aparece escrita debajo. De este modo, sólo tenéis que ir con el cursor a cada zona del plano delimitada por las curvas, coger los valores de  $x$  e  $y$  de la posición del cursor y sustituir en las inequaciones para ver si se satisfacen. Si las inequaciones se cumplen en un punto de una zona, deberán cumplirse en toda la zona. La resolución de los gráficos y del movimiento del cursor es de un pixel.

La escala inicial del dibujo es siempre tal que se pueden ver todas las zonas del plano, pero ello hace que la resolución pueda ser baja. Si existen zonas pequeñas o queréis obtener con precisión las coordenadas de un punto de corte de curvas, por ejemplo, probad a pulsar ENTER y aparecerán tres opciones: aumentar la escala, disminuirla o centrar el dibujo en otro sitio (en es-

ta opción el dibujo se centra donde se halle el cursor). Así podéis, por ejemplo, centrar una zona determinada y luego ampliarla todo lo que queráis. Inicialmente la pantalla está centrada en el origen de coordenadas, pero al moveros y variar la escala podéis perder de vista los ejes. Sin embargo, la intención de las coordenadas del siempre aparece debajo, de que siempre sabréis dónde e Para cambiar de ecuaciones tituir la escala inicial pulsad S después de ENTER.

Por último indicaros qué ocurre en los casos particulares: si sólo hay una inecuación, el proceso es el mismo con una sola curva; y si sólo hay una incógnita, se representarán rectas verticales que delimitarán intervalos del eje  $x$ , y será en ellos donde deberéis probar para encontrar la solución.

Creemos que este sistema gráfico de resolver las inecuaciones se adapta mucho mejor al SPECTRUM.

y por ello lo hemos hecho así. Daos cuenta de que en esta forma nunca os podéis confundir con las desigualdades, ya que sólo se utilizan para comprobar si una zona del plano es o no solución. Se opera con igualdades, que no deben presentar problemas.

Finalmente, dos advertencias. La primera, que el programa no puede funcionar en un SPECTRUM 16 K porque utiliza una rutina en máquina que se ubica por encima de la dirección 65000. Y la segunda, que esta rutina va en los DATA del principio, así que grabad el programa antes de hacerlo correr para prevenir un posible "cuelgue" debido a un despiste involuntario.

```

2 CLEAR 649999 BORDER 6 PAPE
R INK 2 CLS
20 FOR i:=65005 TO 65144 READ
A POKE i,a NEXT i
85 DATA 201,6,10,14,10
100 DATA 202,7,12,12,9,5,217,20
5,229,34,237,75,125,92,12,217,16
,244,217,13
100 DATA 13,13,4,4,2,217,6,5,217
205,217,217,12,12,9,5,217,6
6,244,228,217,4,13,13,201
110 CLS GO SUB 400
120 GO SUB 10000 GO SUB 1200
130 GO SUB 13000 GO TO 1990
200 INPUT "Missa ecuaciones? Y
/N) : LINE Z% IF Z%=5" OR Z%
=5 THEN GO TO 120
210 GO TO 110
400 REM *****PRIMER*****
410 INPUT "Cuantas ecuaciones :
1-217" : num
500 DIM c(3,4) CLS PRINT "Ax
+by+Cx+D=0"
1510 RESTORE 600 FOR i:=1 TO 100
READ b5
520 INPUT "(b5)" : ecuacion="(A"
L12 LET e(1,1)=e(i,1),c(2,1)=e(i
3,1)+e(1,1),d(1,1)=e(i,1)+e(1
530 NEXT i
540 IF num=1 THEN FOR i:=1 TO 4
LET d(2,i)=e(1,i) NEXT i
550 RETURN
600 DATA "Primera", "Segunda"
1000 REM *****SEGUNDA*****
1010 DIM c(3,4)
1020 FOR i:=1 TO 100
1030 IF i=3 THEN FOR j:=1 TO 4
LET e(3,j)=e(1,j)+e(2,j)-e(2,1)
NEXT j
1040 LET disc=e(3,2)*e(3,2)+4*e(
3,1)*e(3,4)
1045 LET disc=disc AND (ABS disc
< 100)
1050 IF disc=0 OR NOT (e(3,1) AN
d(e(3,2))) THEN GO TO 1100
1060 FOR f:=1 TO (1+int(sqrt(disc))
1070 LET g=NOT (f*(f+1))/4=3
11=-(e(3,1)+e(3,2))/(2*f)+1090
1080 LET d(f,1)=(-e(3,2)+f*g)/e(3
,1)+e(3,4)
1090 LET d(f,2)=(-d(1,1)+d(f,1))*e(
f,1)-d(1,1)*(f,2)+e(f,1)*d(f,1)
1100 FOR g:=1 TO 1290 IF NOT (e(1,
1) OR e(f,3)) THEN GO TO 1150

```

```

0105 IF e(i,1,3) THEN LET d(241,1)
0110 LET d(241,2)=e(i,1,4)/e(i,1,3)
0115 GO TO 1190
0120 LET dis=d(i,2)/e(i,2)-4*e(i,
0125 LET di=d(i,2)
0130 LET di=di AND (ABS di-1e-7)
0135 IF di<0 THEN GO TO 1190
0140 LET d(241,1)=(-e(i,2)-(5GN
0145 (3,2))+5OR di/2)/e(i,1)
0150 LET d(241,2)=0 GO TO 1190
0155 LET d(241,3)=e(i,4)/e(i,2)
0160 LET d(241,2)=0
0165 NEXT i RETURN
0170 REM ***** SUBROUTINE *****
0175 SUBROUTINE PLOT (ABS a, ABS b,
0180 ABS a1, ABS b1, ABS a2,
0185 LET fex=0 LET fey=1
0190 FOR j=1 TO 4 DO (d(i,j,1),fex)
0195 LET fex=1-(d(i,j,1),fex)
0200 LET fey=FN mod (d(i,j,2),fey)
0205 NEXT j LET fe=FN mod 3+fey/2
0210 LET plot=128/fe
0215 LET orx=127 LET ory=87 RE
0220 TURN
0225 REM ***** SUBROUTINE *****
0230 CLS IF orx=0 AND ory=25
0235 IF orx=0 OR ory=0 DRAW 0,175
0240 IF plot=0 AND orx=125 THEN
0245 PLOT 0,ory DRAW 255,0
0250 ORx=0 FOR i=1 TO SUB
0255 LET alfa=e(i,1),plot/plot
0260 LET beta=e(i,2)+plot-2*orx
0265 (e(i,1),plot/plot
0270 LET alfa=9*alfa/10
0275 LET beta=9*beta/10
0280 LET (alfa+e(i,3),plot
0285 (alfa+e(i,4),plot
0290 LET (alfa+e(i,5),plot
0295 LET (alfa+e(i,6),plot
0300 IF NOT gamma THEN GO TO 141
0305 IF alfa OR beta THEN GO SUB
0310 GO TO 1450
0315 IF d(241,3)+gamma+87.5) =
0320 87.5 THEN PLOT 0, del1a/gamma
0325 DRAW 255,0 GO TO 1450
0330 IF NOT alfa AND ABS (del1a/
0335 beta-127.5) < 127.5 THEN PLOT de
0340 (1a/beta,0) DRAW 0,175 GO TO 14
0345
0350 LET dis=beta+beta-4*alfa+de
0355 LET dis=dis AND (ABS dis-1e
0360 -7) IF dis<0 THEN GO TO 1450
0365 LET val=(beta-5OR dis)/2
0370 LET val=(val-1e-5)/127.5
0375 HEN PLOT val,0 DRAW 0,175
0380 LET val=(beta+5OR dis)/2
0385 LET val=(val-127.5) < 127.5 T
0390 HEN PLOT val,0 DRAW 0,175
0395 NEXT i RETURN

```

```

1990 REM PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT
1990 PRINT B0,AT 0.0,"Coordenada y="
    "Coordenada y="; DIM A$(2,16)
    OVER 1
2000 RANDOMIZE USR 65096
2020 IF CODE INKEY$=13 THEN GO TO
    0 2500
2022 LET PY=INKEY$="7" AND PEEK
    65097=170 OR INKEY$="6" AND PEEK
    65097=0
2025 LET PX=INKEY$="8" AND PEEK
    65099=250 OR -INKEY$="5" AND PEEK
    65099=0
2030 RANDOMIZE USR (65095+(ABS P
    X OR ABS PY)). POKE 65097,PEEK 6
    5097+PY: POKE 65099,PEEK 65099+P
    Y
2035 LET A$(1)=STR$(1-ORX+PEEK
    23677)/PI*10: LET A$(2)=STR$(1-
    ORY+2*PEEK 23678)/PI*10
2040 PRINT B0,AT 1.0;A$(1);A$(2)
    OR A$(1) GO TO 2020-200+(ABS P
    X OR ABS PY)
2490 REM PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT
2500 INPUT "PRINT B0,AT 0.0:"
    Aumentar Disminuir Encuadrar
2510 LET B$=INKEY$: IF B$="A" AND
    B$<".32" THEN GO TO 2510
2515 IF CODE INKEY$=532 THEN GO TO 20
    0
2520 IF B$="A" THEN LET PI*10=PI*
    1.4: LET ORX=127+(4-ORX-127)/4: LE
    T ORY=87+(127-87)/4: GO TO 2550
2530 IF B$="D" THEN LET PI*10=PI*
    1.4: LET ORX=127+(4-ORX-127)/4: LE
    T ORY=87+(127-87)/4: GO TO 2550
2540 LET ORX=127+(4-ORX-127)/4: LE
    T ORY=87+(127-87)/4: POKE 23677
    ,ORX: POKE 23678,ORY
2545 POKE 65097,87: POKE 65099,91
    255
2550 GO SUB 1300: GO TO 1990
2904 REM PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT PRINT
2995 LET I=1: LET PY=0: LET VARS
    =PEEK 23627+256+PEEK 23628: POKE
    VARS-123,840: POKE VARS-128,106
    2996 FOR J=0 TO 255: LET PY=PEE
    K 23678: LET PY2=(PI*10+PY+beta)*
    +delta/1.7: gamma: LET DY=PY-PY1: L
    ET DY2=PY2-PY1: LET DY3=PY3-PY1
    2997 IF $I THEN THEN PLOT J,PY
    2998 POKE VARS-123,240+64+$I: POKE
    VARS-128,106+$I: POKE VARS-120
    ,118+$I
    2999 NEXT J: RETURN

```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## CHOQUES 1

Esta semana os presentamos la primera parte del programa choques, que debido a su longitud no podemos ofrecerlos en un solo número.

Puede resolver choques, tanto elásticos como inelásticos, en una sola dirección o en el plano, que son los casos más frecuentes en BUP y COU. Y lo que es más importante, los visualiza de forma animada en la pantalla. Esto es de gran ayuda a la hora de discriminar qué soluciones no son admisibles aunque sean soluciones de las ecuaciones.

Parte de unos datos iniciales y soluciona las ecuaciones de choque, que como ya sabéis son:

1— Se conserva la cantidad de movimiento, tanto en el eje x como en el y (2 ecuaciones).

2— Para choques elásticos se conserva la energía

cinética antes y después del choque (1 ecuación).

3— Para el choque perfectamente inelástico la velocidad de las dos bolas es la misma tanto en el eje x como en el y (2 ecuaciones).

Como ya sabéis el choque no depende de la masa individual de cada bola sino del cociente de las dos masas que es lo que os pide el programa.

Si el choque es inelástico tenemos que dar las velocidades y los ángulos con el eje horizontal ( $v_1$ ,  $\beta_1$ ,  $v_2$ ,  $\beta_2$ ).

En el choque elástico el programa puede calcular el movimiento antes del choque si le damos los datos de después del choque y viceversa.

Como sólo tenemos 3 ecuaciones, en el caso plano, necesitamos un dato adicional que siempre se tiene que dar sobre la bola

1 ( $\beta_1$  o  $\beta_2$ ,  $v_1x$  o  $v_1y$ ,  $v_2x$  o  $v_2y$ ).

3 y 4 son los subíndices para las bolas 1 y 2 respectivamente, después del choque.

Los ángulos son positivos en el sentido contrario a las agujas del reloj y se dan en grados.

El choque perfectamente inelástico sólo tiene una solución, sin embargo el choque elástico tiene dos soluciones en general aunque puede tener sólo una o ninguna.

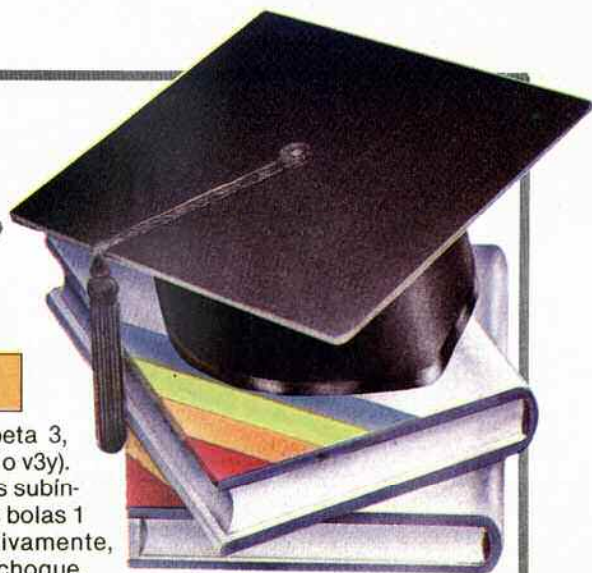
Si tiene dos, una de ellas puede ser incompatible con el enunciado del problema, os será fácil discriminarla con la ayuda de la visualización animada del choque.

Puede no tener ninguna solución si le damos como dato adicional una  $v_x$  o  $v_y$  mayor o menor de lo posible y que haga que no se pueda conservar la energía

cinética, por ejemplo.

Este programa se sale un poco de nuestra línea habitual en cuanto que no explica cómo obtiene los resultados, solamente los muestra en la pantalla; pero creemos que merece la pena sacrificar los cálculos en función de poder conseguir su representación gráfica y ayudar a una mejor comprensión de cada caso. Hemos considerado que esto es suficiente en curso alto como el de COU.

Lo interesante no es que resolváis los problemas de clase con él, sino que estudiéis los dominios de los datos adicionales para los que se obtiene solución en un problema y tratéis de justificarlos, por ejemplo.



```
1 CLEAR 59999, GO SUB 6500
2 DEF FN S(A,X)=A+100*(A=0)+
(X<0)-100*(A=0)+(X<0)
3 DIM V(4), DIM I(8)
400 DATA "TIPOS DE CHOQUE"
500 DATA "1- UNIDIRECCIONAL-ELA"
600 DATA "2- UNIDIRECCIONAL-INE"
700 DATA "3- PLANO-ELASTICO"
800 DATA "4- PLANO-INELASTICO"
900 RESTORE 300 FOR I=1 TO 5
1000 IF I=1: READ I: PRINT AT 3
1100 NEXT I
1200 LET ASD=CODE INKEY$: IF (ASD
1300 LET ELA=(ASD=49)+(ASD=51)
1400 LET PI=2
1500 IF ASD=51 THEN LET PI=1: LET
1600 T=MOD0=1: LET TETA=0: GO TO 410
1700 IF ELA=0 THEN LET TETA=1: GO
1800 TO 520
1900 INPUT "DATOS DE LA ENTRADA
2000 DE LA " "SALIDA (ENTER/S) " : L
2100 IF I=1 THEN LET ENT=1: GO
2200 TO 520
2300 LET ENT=0
2400 RESTORE 600+(ENT=0)
2500 DIM X(4): FOR I=1 TO 4: REA
2600 D I$
2700 IF (PI=1)+(I=2)+(I=4)=1 T
2800 HEN NEXT I: GO TO 530
2900 INPUT "1$":X(I): NEXT I
3000 INPUT "2$":X(I): IF TETA
3100 =0: THEN GO TO 1000
3200 DATA "V1=":"BETA1=":"V2="
3300 "BETA2=":"V3=":"BETA3=":"V4="
3400 "BETA4="
3500 DATA "1- beta","2- v","x
3600 "3- v","y"
3700 PRINT AT 1,4:"DATO COMPLEME
3800 NTARIO"
3900 RESTORE 650 FOR I=1 TO 3:
4000 BEEP 15,20: READ I$:J$
4100 PRINT AT 3+I,10:I$,3-2*(EN
4200 T=0):J$: NEXT I
4300 LET ASD=CODE INKEY$: IF (ASD
4400 =49)+(ASD=51) THEN GO TO 700
4500 CLS
4600 GO TO 700+10*(ASD=48)
4700 INPUT "BETA":(3-2*(ENT=0)):
4800 "LINE"
4900 IF J$="3" THEN LET MOD0=1:
5000 LET TETA=PI*VAL J$/180: GO TO 10
5100
5200 INPUT "V1":(3-2*(ENT=0)):X$="
5300 V3X: LET MOD0=2: GO TO 1000
5400 INPUT "V2":(3-2*(ENT=0)):Y$=
```

```
"V3Y: LET MOD0=3: GO TO 1000
1000 LET V2X=X(3)+COS (X(4)*PI/1
80)
1002 LET V1Y=X(1)*SIN (X(2)*PI/1
80)
1004 LET V1X=X(1)*COS (X(2)*PI/1
80)
1006 LET V2Y=X(3)*SIN (X(4)*PI/1
80)
1010 GO SUB 3000: GO SUB 5000-10
00*(ELA=0): LET PAS=1
1012 FOR I=1 TO 3 STEP 2: LET V(
I)=SQR (I(1,PAS)*I(1,PAS)+I(1+1,
PAS)*I(1+1,PAS)): NEXT I
1013 FOR I=1 TO 3 STEP 2: LET VO
I=ATN (I(1+1,PAS)/I(1,PAS)+1E-2
0)):180/PI: LET V(I+1)=FN S(VOI,
I(1,PAS)): NEXT I
1014 FOR J=0 TO 1: FOR I=1 TO 4:
LET F(4+J)=X(I)+(J=0)+V(I+1)*
J*(4+J)+TENT=0)+(X(I)*J+V(I)*
J*(J=0))
1016 NEXT I: NEXT J
1018 GO SUB 7000
1020 RESTORE 600: FOR I=1 TO 8:
1030 PRINT AT 2+(I-1),16:I$,AWQ:
1040 NEXT I
1050 PRINT AT 20,0:"SOLUCION " :P
1060 "VISUALIZO EL CHOQUE."
1070 PAUSE 30: GO SUB 7500: PAUS
1080 E PRINT AT 10,2: FLASH 1:"RE
1090 PETITION"
1100 PAUSE 30: GO SUB 7500
1110 IF (4+J)=0)+(I=2)+(I=3)=1 THEN CL
1120 S: LET PAS=2: GO TO 1012
1130 STOP
1140 DIM K(4,2): LET KX=V1X+KX+V
2X
1150 LET KY=V1Y+KX+V2Y
1160 LET KV=(V1X+V1X+V1Y+V1Y)+KX
1170 +V2X+V2X+V2Y+V2Y)
1180 RETURN
1190 LET V3X=X(1)+KX: LET V4X=
V3X
1200 LET V3Y=KY/(1+KX): LET V4Y=
V3Y
1210 FOR I=1 TO 4: FOR J=1 TO 2:
LET K(I,J)=V3X*(I=1)+(I=3)+V3
Y*(I=2)+(I=4)
1220 NEXT I: NEXT J
1230 RETURN
1240 DIM L(4,2): LET LKX=LX/KX:
LET LKY=KY/KX
1250 LET LAX=LX/LKX: LET LAAY=AA
X
1260 LET LBX=LX/LKX: LET LBY=
BBX+LKY/LKX
```

```
5030 LET CCX=LX+KX: LET CCY=KY
5040 LET AAX=LX+KX+1: LET BBX=L
BX+KX: LET CCK=LX+KX+1: LET BBY=L
BY+KX: LET CCY=CCY+KX
5050 GO TO 5000+MOD0*100
5100 IF COS TETA=0 THEN LET V3X=
0: GO TO 5200
5110 LET TN=ATAN TETA+1E-20
5120 LET AAX=TN+TN+AAAY+AAX: LET
BBX=TN+TN+BBY+BBX
5130 LET CCK=LX+KX+CCY-KV
5140 LET DIS=(BBX+BBX-4*AAX+CCX)
5150 IF DIS=0 THEN RETURN
5160 FOR I=1 TO 2: LET V3X=(-BBX
-SGN (1.5-I)*SQR DIS)/2/AAX
5170 LET V3Y=TN+V3X: LET K(1,1)=
V3X*(ABS V3X)+1E-6: LET K(2,1)=
V3Y*(ABS V3Y)+1E-6
5180 GO TO 5250
5190 LET CCY=CCY-KV+AAX+V3X+V3X+
BBX+V3X+CCX
5210 LET DIS=(BBY+BBY-4*AAAY+CCY)
5220 IF DIS=0 THEN RETURN
5230 FOR I=1 TO 2: LET V3Y=(-BBY
-SGN (1.5-I)*SQR DIS)/2/AAAY
5240 LET K(1,1)=V3X*(ABS V3X)+1E-
6: LET K(2,1)=V3Y*(ABS V3Y)+1E-6
5250 LET K(3,1)=LX+V3X/KX: LET
K(3,1)=K(3,1)+ABS K(3,1)+1E-6
5265 LET K(4,1)=LX+V3Y/KY: LET
K(4,1)=K(4,1)+ABS K(4,1)+1E-6
5270 NEXT I: RETURN
5300 LET CCK=LX+KX+V3Y+V3Y+
BBX+V3Y+CCX
5310 LET DIS=(BBX+BBX-4*AAX+CCX)
5320 IF DIS=0 THEN RETURN
5330 FOR I=1 TO 2: LET V3X=(-BBX
-SGN (1.5-I)*SQR DIS)/2/AAX
5340 GO TO 5240
5350 LET DD=LX+ABS (PX1-SX1)+ABS
(PY1-SY1)-ABS (PX1-SX1)+ABS (P
Y1-SY1)+ABS (PX1-SX1)
5360 LET DD2=ABS (PX2-SX2)+ABS
(PY2-SY2)-ABS (PX2-SX2)+ABS (P
Y2-SY2)+ABS (PX2-SX2)
5370 LET DD=DD1+DD2+DD1+(DD2>D
D1)
5385 LET DD3=ABS (PX1-LX1)+ABS
(PY1-LY1)-ABS (PX1-LX1)+ABS (P
Y1-LY1)+ABS (PX1-LX1)
5395 LET DD4=ABS (PX2-LX2)+ABS
(PY2-LY2)-ABS (PX2-LX2)+ABS (P
Y2-LY2)+ABS (PX2-LX2)
5400 LET PP=DD+DD3+DD4+DD3+(DD
4>DD3)
5415 FOR I=0 TO PP
5420 POKE 51000+2*I,(SX1+I*(PX1
-SX1)/DD1) AND (I+DD1)*I*(PX1+I
-DD1)+(LX1-PX1)/(PP-DD1) AND (I+DD
1)
```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## CHOQUES 2

Como dijimos la semana pasada aquí tenéis la segunda parte del programa «Choques»; ya sabéis que tenéis que «mergear» sobre la primera.

El programa, unido al de la semana pasada, resuelve choques elásticos e inelásticos, tanto en un plano como en una sola dirección. Además de ello, una vez solucionado el choque, lo visualiza de forma animada, lo cual os ayudará a familiarizaros con las soluciones que dan unos datos iniciales u otros. Con esta representación en pantalla os será más sencillo discriminar qué soluciones son válidas o no, aunque todas las que os dé cumplen las soluciones.

Como sabéis, un choque inelástico tiene solu-

ción única. Un choque elástico tiene una ecuación, la de la energía, que es de segundo grado, por lo que en general tendrá dos soluciones, si es unidireccional, una de estas soluciones es que cada bola siga con su velocidad después del choque. Esta solución cumple las ecuaciones, pero debe ser desechada, pues es equivalente a que no se hubiera producido el choque.

También es posible que no haya ninguna solución en choques elásticos en el plano dependiendo del dato adicional que le deis, su valor puede hacer que no se pueda cumplir alguna de las ecuaciones. En este caso el programa lo muestra diciendo que todas las soluciones son cero.

En caso de existir dos soluciones el programa las muestra y las visualiza una detrás de otra; vosotros tendréis que discriminar si alguna de ellas es incompatible con el enunciado o no debe ser aceptada.

Aquí tenéis un ejemplo:

Una bola se lanza contra otra de igual masa en reposo a una velocidad de 5 m/s. Sale del choque con un ángulo de 30°. Choque elástico en un plano.

Datos:  $v_1 = 5$ ;  $\text{Beta}_1 = 0$ ;

$v_2 = 0$ ;

$\text{Beta}_2 = 0$ .

Dato adicional:

$\text{Beta}_3 = 30^\circ$ .

Se obtienen las soluciones:

$v_3 = 4,83$ ;  $\text{Beta}_3 = 30$ ;

$v_4 = 2,5$ ;  $\text{Beta}_4 = -60$

$v_3 = 0$ ;  $\text{Beta}_3 = 0$ ;

$v_4 = 5$ ;  $\text{Beta}_4 = 0$

Como veis, la segunda solución es desechable, ya que cumple las ecuaciones pero no sale con  $\text{Beta}_3 = 30^\circ$ , sino que se para.

El programa de esta semana tiene unas rutinas en máquina en las últimas líneas por lo que hay que grabarlo antes de intentar hacerlo correr.

Con este capítulo finalizamos «los Choques». Esperamos que os hayan quedado claros.



```

15 LET (lag=1
1018 PRINT "
1041 FOR v=1 TO 7 STEP 2: IF r(y
10 THEN LET r(y)=r(y): LET r(y
+1)=(y+1)+100
1042 NEXT y
1043 IF d15<0 THEN PAUSE 250: GO
TO 1071
1045 GO SUB 7000
1055 PAUSE 500
7000 REM *****
7010 REM *****
7050 LET r(2)=r(2)-(SGN r(2))+18
0+100*NOT r(2)
7060 LET r(4)=r(4)-(SGN r(4))+18
0+100*NOT r(4)
7100 DIM p(2,4,2) FOR i=1 TO 2:
FOR j=1 TO 2: LET p(i,j,1)=
r(4)+2+j-5: COS (PI/180*(4+i+2
j-4))
7110 LET p(i,2+j,1)=r(4+i+2+j-5)
*IN (PI/180*(4+i+2+j-4)) NEXT
j
NEXT i
7120 LET a=ATN ABS (p(1,2,1)-
p(1,4,1))/p(1,1,1)-p(1,3,1)+1e-
10)
7130 DIM b(4): LET b(1)=7*(COS a
(1)+SGN (p(1,1,1)-p(1,3,1)): LET
b(2)=7*(SIN a(1)+SGN (p(1,2,1)-
p(1,4,1)))
7140 LET b(3)=b(1): LET b(4)=b
(2)
7150 FOR i=1 TO 2: FOR j=1 TO 4:
LET varr=p(i,j,2): LET p(i,j,2)=
varr
7160 FOR i=1 TO 2: FOR k=1 TO 3:
FOR j=1 TO 3:
7170 IF p(i,j,2)+p(i,j+1,2) THEN
LET varr=p(i,j+1,2): LET p(i,j,2)=
varr
7180 NEXT j: NEXT i
7190 LET u=+45/p(1,1,2): LET u=
+45/p(2,1,2)
7200 LET u=uei: FOR i=1 TO 2: F
OR j=1 TO 4: LET p(i,j,2)=p(i,j,
1)+u+b(j): NEXT j: LET u=uei:
NEXT i
7210 LET px1=53+b(1): LET py1=11
1+b(2): LET px2=53+b(3): LET py2
=111+b(4): LET sx1=53+p(1,1,2):
LET sy1=111+p(1,2,2)
7220 LET sx2=53+p(1,3,2): LET sy
2=111+p(1,4,2): LET sx1=53+p(2,1,
2): LET sy1=111+p(2,2,2): LET x2
=53+p(2,3,2): LET y2=111+p(2,4,
2)
7230 PLOT 63,48: DRAW 0,127: PLO
T 0,111: DRAW 127,0
7233 PRINT AT 7,15: "x"
7235 PRINT AT 0,8: "y"
7240 POKE 65149,sx1 POKE 65147,

```

```

sy1
7250 POKE 65149,sx2: POKE 65147,
sy2
7260 PLOT sx2,sy2: LET dx1=.7*(p
x1-sx1): LET dy1=.7*(py1-sy1): D
RAW dx1,dy1
7270 FOR k=1 TO 2: DRAW -.15+dx1
, -.15+dy1: DRAW (SGN (1-1.5))+1
8*dy1: - (SGN (1-1.5))+18*dy1
7275 DRAW sx1+dx1-PEEK 23677,sy1
+dy1-PEEK 23678: NEXT k: PRINT A
T (171-sy1)/8,(sx1+7)/8-3*(sx1+6
3): INVERSE 1,2
7280 PLOT sx2,sy2: LET dx2=.7*(p
x2-sx2): LET dy2=.7*(py2-sy2): D
RAW dx2,dy2
7290 FOR k=1 TO 2: DRAW -.15+dx2
, -.15+dy2: DRAW (SGN (1-1.5))+1
8*dy2: - (SGN (1-1.5))+18*dy2
7295 DRAW sx2+dx2-PEEK 23677,sy2
+dy2-PEEK 23678: NEXT k: PRINT A
T (171-sy2)/8,(sx2+7)/8-3*(sx2+6
3): INVERSE 1,2
7300 GO SUB 6100
7310 LET r(2)=r(2)-(SGN r(2))+18
0+100*NOT r(2)
7320 LET r(4)=r(4)-(SGN r(4))+18
0+100*NOT r(4)
7330 RETURN
7490 REM *****
7500 FOR i=0 TO pp
7505 POKE 65149,PEEK (61000+2+i)
7510 POKE 65147,PEEK (61001+2+i): R
ANDOMIZE USR 65146: POKE 65149,P
EEK (62000+2+i): POKE 65147,PEEK
(62001+2+i): RANDOMIZE USR 6514
6
7510 PLOT 63,48: DRAW 0,127: PLO
T 0,111: DRAW 127,0: RANDOMIZE U
SR 65100
7515 NEXT i
7517 IF NOT (lag THEN RETURN
7520 POKE 65149,PEEK (61000+2+i)
7525 POKE 65147,PEEK (61001+2+i): R
ANDOMIZE USR 65146: POKE 651
49,PEEK (62000+2+i): POKE 6514
7,PEEK (62001+2+i): RANDOMIZE
USR 65146
7530 PLOT 63,48: DRAW 0,127: PLO
T 0,111: DRAW 127,0: PRINT AT 7,
15: "x": AT 0,8: "y"
7540 PRINT AT (171-ly1)/8,(lx1+7
1/8-3*(lx1+63)): INVERSE 1,1
7545 PRINT AT (171-ly2)/8,(lx2+7
1/8-3*(lx2+63)): INVERSE 1,2
7550 PRINT "0, Púlsala una tecla p
ara continuar": PAUSE 0: RANDOMI
ZE USR 65100
7560 RETURN
8080 REM *****
8090 REM *****
8140 POKE 61001+2+i,(sy1+i)*(py1

```

```

-sy1)/dd) AND (i=dd))+(py1+(i-
dd)*(ly1-py1)/(pp-dd)) AND (i=dd
))
8150 POKE 62000+2+i,(sx2+i)*(px2
-sx2)/dd) AND (i=dd))+(px2+(i-
dd)*(lx2-px2)/(pp-dd)) AND (i=dd
))
8160 POKE 62001+2+i,(sy2+i)*(py2
-sy2)/dd) AND (i=dd))+(py2+(i-
dd)*(ly2-py2)/(pp-dd)) AND (i=dd
))
8190 NEXT i: POKE 62000+2+i,0: P
OKE 62001+2+i,0
8200 POKE 61000+2+i,0: POKE 6100
1,0
8250 RETURN
8499 REM *****
8500 RESTORE 8500: LET (lag=0
8510 LET suma=0: FOR i=65100 TO
65127: READ a: POKE i,a: LET sum
a=suma+a: NEXT i
8520 DATA 229,213,197,1,255,15,3
3,239,79,17,238,79,64,0,237,168
203,165,203,163,120,177,32,246,1
93,209,225,201
8530 IF suma<4191 THEN PRINT "E
spera en DATA 8520": STOP
8530 LET suma=0: FOR i=65146 TO
65182: READ a: POKE i,a: LET sum
a=suma+a: NEXT i
8540 IF suma<4563 THEN PRINT "E
spera en DATA 8550": STOP
8550 DATA 6,100,14,100,229,33,0
255,197,120,214,7,71,229,205,176
254,225,85,35,94,35,122,179,40
7,120,130,71,121,131,79,24,235,1
93,225,201
8560 LET suma=0: FOR i=65200 TO
65214: READ a: POKE i,a: LET sum
a=suma+a: NEXT i
8570 IF suma<1715 THEN PRINT "E
spera en DATA 8580": STOP
8580 DATA 197,205,170,34,71,4,62
1,15,16,253,174,119,193,201
8590 LET suma=0: FOR i=65280 TO
65312: READ a: POKE i,a: LET sum
a=suma+a: NEXT i
8600 IF suma<1805 THEN PRINT "E
spera en DATA 8610": STOP
8610 DATA 0,-1,1,-1,0,-1,1,-1,0
-1,1,0,1,-1,1,0,1,-1,1,0,1,1,1
1,0,1,1,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,0,1
8620 POKE 65360,0: POKE 65361,0
8630 LET suma=0: FOR i=65000 TO
65023: READ a: POKE i,a: LET sum
a=suma+a: NEXT i
8635 IF suma<3422 THEN PRINT "E
spera en DATA 8640": STOP
8640 DATA 33,72,238,78,35,70,35
120,177,209,229,205,76,254,205,1
26,254,6,255,16,254,225,24,235
8650 RETURN

```

# Profesor particular

Arturo LOBO y J. J. LEON

## **FUNCIONES**

Con el programa de esta semana nos despedimos de vosotros. Llegan las vacaciones escolares y también «Profesor particular» se termina, como el curso.

Esta semana os ofrecemos una serie de funciones matemáticas y subrutinas que os serán de gran utilidad en vuestros estudios y cuando hagáis vuestros programas.

En la línea 30 tenéis la función  $p(x)$  que detecta si el argumento de la función es par o impar, su salida es 1 ó  $-1$  si el número es par o impar, o cero si no es par o impar como 2,36, o sea, si el número no es entero.

Tenéis además 3 funciones que os serán de gran utilidad. Como sabéis, el Spectrum no realiza la función elevar correctamente, sólo si la base es positiva; por ejemplo  $(-2)^2$  da error y sin embargo, su valor es 4. Por esto os ofrecemos: en la línea 50 la función  $x(z)$ : eleva el número  $x$  a un número entero  $z$ . Da error si

$x < 0$  y  $z$  no es entero (quitando el LN no daría error).

En la línea 70 la función  $r(x,n)$  que hace la raíz  $n$ -ésima de  $x$ . Si  $x < 0$  b tiene que ser entero e impar, si no da error. Por ejemplo:  $\text{FN } r(-8,3) = \sqrt[3]{-8} = -2$ .

En la 90 q(x,a,b) que realiza la operación matemática  $x \uparrow (a/b) = \sqrt[b]{x^a}$ .

En la 110 la función  $e(x, r)$  que es la función que suelen llevar las calculadoras donde  $r$  es un  $n.º$  real. Si  $x < 0$  o bien  $r$  o  $1/r$  tienen que ser enteros si no da error, pues así se define la función. Esto la diferencia de la de arriba que es más potente por ejemplo:

$$(-8)^{\uparrow(4/5)} \neq (-8)^{\uparrow(0,8)}$$

también es

$(-8)^{\uparrow(4/5)} \neq (-8)^{\uparrow(8/10)}$   
Comprobarlo con las funciones.

En la línea 5.000 os damos una subrutina que reduce una fracción a la mínima irreducible y da el máximo común divisor del numerador y denominador.

Su entrada son las va-

riantes num y  
den, numerador  
y denominador  
de la fracción y la  
salida es nume y  
deno de la fracción  
irreducible y m.c.d.

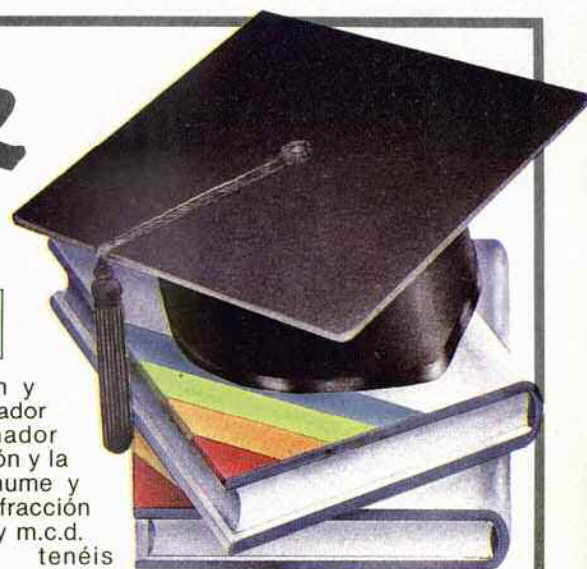
También tenéis otras funciones entre medias indicadas con los REM.

La función **FIX** redondea los números a «fix número de decimales». Las subrutinas «polar a rectangular» y «rectangular a polar» operan con una matriz **a(2)** igual que las funciones de las calculadoras corrientes.

La subrutina 8.000 debe hacerse correr después de teclear CREAM 64999 y define una función de argumentos  $x, y, n$  que al ser llamada dibuja una cifra  $n$  en pequeño en las coordenadas de plot  $x, y$ . Los valores de  $n$  10 y 11 dibujan un punto decimal y un signo menos. El valor de la función es la coordenada  $x$  de plot necesaria para dibujar otra cifra a continuación.

La subrutina 7.000 dibuja en la posición de PRINT una fracción definida en la matriz a(2) y rectifica dicha posición convenientemente. Si se quiere evitar que simplifique automáticamente la fracción basta con suprimir el GOSUB 7140 del principio. Esta subrutina requiere introducir la 8.000 previamente.

Para comprender bien el funcionamiento de estas subrutinas, así como de las funciones definidas por el programa, lo mejor es probarlo todo varias veces.

[illegible]